УДК 372.851
doi: 10.18323/2221-5662-2021-4-7-16

ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА ДВОЙСТВЕННОСТИ ПРИ СОСТАВЛЕНИИ УПРАЖНЕНИЙ НА ЗАНЯТИЯХ ПО ГЕОМЕТРИИ

А.В. Баталаев, аспирант
Калмыцкий государственный университет имени Б.Б. Городовикова, Элиста (Россия)

Ключевые слова: принцип двойственности; составление упражнений; геометрия треугольника; аналитическая геометрия; метод целочисленного представления; проверка теорем.

Аннотация: Геометрия является одной из сложных дисциплин, в которых многие факты взаимосвязаны. Развить представление учащихся о взаимосвязях между фактами можно, проводя сопоставление при помощи принципа двойственности. Принцип двойственности известен в проективной геометрии, математической логике. Данный принцип ярко выражен в одной из теорем новой геометрии треугольника. В традиционном курсе аналитической геометрии не изучаются факты новой геометрии треугольника. Для закрепления многих тем курса аналитической геометрии, например «Расстояние между двумя точками», «Нормальное уравнение прямой», «Угол между двумя прямыми» и др., целесообразно рассмотреть на занятиях некоторые факты новой геометрии треугольника в декартовой системе координат. Таким образом, вносится элемент новизны в повторяемый материал. В пособиях по геометрии треугольника задания решают без применения формул аналитической геометрии, а именно классическими методами либо в барицентрических координатах. В статье предлагается методика составления пар упражнений с использованием принципа двойственности в методике преподавания планиметрии. Упражнения составляются для декартовой системы координат, так как это позволяет продемонстрировать на чертежах двойственность точек. В составленных упражнениях построены два чертежа в параллельных столбцах. Точки могут быть в разных случаях вершинами треугольника, центром вписанной окружности, основанием высоты. Стороны исходного треугольника располагаются на осях координат, и их длины сторон составляют пифагорову тройку для лучшего понимания учащимися алгоритма решения задачи. Нормальное уравнение прямой показывает необходимость аналитического исследования, поскольку расстояние от ортоцентра до сторон ортотреугольника сложно проверить на чертеже из-за малой величины. На множестве таких информационных единиц устанавливаются отношения агрегации (часть – целое), отражающие геометрическое вложение компонентов.

ВВЕДЕНИЕ

В математике наиболее строгое выражение принцип двойственности имеет в проективной геометрии. Принцип двойственности впервые был сформулирован Ж.В. Понселе. Данный принцип является главной особенностью проективной геометрии. Принцип двойственности – это набор утверждений, устанавливающих соответствия между различными объектами. Например, двойственными объектами являются «точка» и «прямая», а свойству «точка лежит на прямой» соответствует двойственное свойство «прямая проходит через точку» [1]. В проективном пространстве двойственными являются понятия «точка» и «плоскость». Двойственными могут быть как теоремы (теорема Паскаля и теорема Брианшона), так и аксиомы.

Отметим, что принцип двойственности в математике (математической логике) может быть формализован. «Двойственности закон – закон математической логики, который гласит, что если формулы A и B равносильны, то и двойственные им формулы A^* и B^* также равносильны»[1].

Двойственные формулы получаются при замене в них исходных понятий, отношений или операций на двойственные, если они существуют. Так, в математической логике двойственными являются операции конъюнкции (∧) и дизъюнкции (∨). Двойственные формулы (1) и (2) равносильны и тождественно истинны:

$$A\vee(B\wedge C)=(A\vee B)\wedge(A\vee C); \quad (1)$$

$$A\wedge(B\vee C)=(A\wedge B)\vee(A\wedge C). \quad (2)$$

В дидактике математики принцип двойственности можно, как представляется, использовать в менее строгой форме, даже в виде более широкого принципа дополнительности, появившегося в квантовой механике [2]. Условно двойственными в дидактике математики можно считать понятия «вписанная окружность» и «описанная окружность».

На наш взгляд, принцип двойственности и структурированность знаний ярко выражены в следствиях из теорем о пересечении высот треугольника и о пересечении биссектрис треугольника, когда одна и та же точка является ортоцентром треугольника ABC и в то же время центром вписанной окружности высотного треугольника [3]. Точки могут быть в одних случаях вершинами треугольника, центром вписанной окружности, основанием высоты. На множестве таких информационных единиц устанавливаются отношения агрегации (часть – целое), отражающие геометрическое вложение компонентов.

Под новой геометрией треугольника понимают геометрию, в первую очередь связанную с понятием ортоцентра высотного треугольника, антипараллельности его сторон, формулами расстояний между центрами вписанной и описанной окружности, прямыми и окружностями Эйлера. Ключевыми характеристиками геометрии треугольника являются так называемые замечательные точки: O – центр описанной окружности; J – центр вписанной окружности; H – ортоцентр, или

[1] *Кондаков Н.И. Логический словарь. М.: Наука, 1971. 113 с.*

точка пересечения высот; M – центр масс, или точка пересечения медиан. С самого начала геометрия треугольника развивалась параллельно с геометрией тетраэдра, причем с использованием единых обозначений, например O – центр описанной сферы тетраэдра, с выделением центров O_i описанных окружностей на четырех гранях тетраэдра. Если в правильном треугольнике и правильном тетраэдре $O \equiv J \equiv M \equiv H$ – одна точка, то для равногранного, но неправильного тетраэдра совпадают первые три точки, а точка Н не существует. Тетраэдр, у которого высоты пересекаются в одной точке, называется ортоцентрическим.

На съезде 2018 года в МГУ в большом пленарном докладе В.А. Садовничего «О математике и не только» была подчеркнута неизменная роль учителя, который учит самостоятельно мыслить, логически рассуждать [4]. Выполнение профессиональных задач зачастую требует применения математических знаний и методов [5].

У учащихся в большей степени вызывают затруднения дисциплины, в которых факты тесно взаимосвязаны. При этом отсутствие даже одной части из цепочки размышлений может привести к разрыву этой цепи [6]. Одна из традиций российского математического образования заключается в дедуктивном изложении курса геометрии, построенном на адаптированной аксиоматической основе [7]. Геометрия всегда считалась сложным предметом. Одной из часто недооцениваемых проблем обучения является недостаточное осознание учащимися взаимных связей между фактами. Эта проблема характерна для любых учебных дисциплин [8]. Нередко учащиеся не связывают в своем сознании учебный материал с обыденным опытом, ранее пройденным материалом. Сформировать представление о взаимосвязях между фактами можно, разносторонне рассмотрев сущность и проявления, при этом проводя сопоставление[2]. Математика воспитывает культуру представления сложного объекта в виде системы взаимодействия более простых. К предмету математики относятся совокупность математических понятий и связь между этими понятиями[3]. Процесс развития связей между математическими понятиями изучает методика математики. Хорошему усвоению теорем и связи между ними способствует их регулярное повторение при решении задач. У учащихся нужно спрашивать: на каких теоремах основано решение задачи, в чем главная идея решения. Это будет содействовать сознательному усвоению учебного материала [9].

Выполнение учащимися расчетно-практических работ с использованием построений, расчетов, измерений активизирует их познавательную деятельность, осуществляет связь теории и практики в обучении. Практика является областью применения и в то же время средством для проверки теоретического материала [10].

В [11] приведен пример расчетно-практического задания по геометрии для учащихся 9 класса, в котором используются элементы новой геометрии треугольника. В пунктах 11, 12 данного задания требовалось:

11*. Проверить, что точки O, M, H лежат на одной прямой – прямой Эйлера, причем точка M делит отрезок OH в отношении 1:2, считая от точки O.

12*. Составить уравнение окружности девяти точек, проходящей через середины трех сторон треугольника. Убедиться, что на этой окружности лежат основания высот и середины отрезков, соединяющих его вершины с ортоцентром.

Авторы данной работы считают, что расчетно-практические задания с успехом могут заменить практические задачи «реальной математики». В расчетно-практических работах задачи в большинстве случаев связаны с определенным объектом. Эти работы требуют от учащихся умения оценивать правильность полученного результата, владения навыками счета [11].

Хорошо организованный самоконтроль является важным условием успешности обратной связи. Учащимся необходимо выяснить причину, по которой ответ верный либо неверный [12]. Одной из существенных задач обучения является воспитание у учащегося ответственности за проделанные расчеты. Этому способствует проверка решения задач. Умение оценивать результат своих действий важен как при решении задач, так и в повседневной жизни.

По мнению академика П.М. Эрдниева [13], предварительное точное построение фигур дает большие возможности для проверки теорем при помощи измерения элементов фигур. Чертеж является необходимым элементом анализа условия геометрических задач. Верно построенный чертеж содействует улучшению глазомера, создает опору в решении задачи, вырабатывает у учащихся умение охватывать соотношение элементов чертежа [10; 13]. На наш взгляд, для построения точных чертежей целесообразно использовать программу GeoGebra. При помощи этой программы можно проверить правильность проведенных построений и расчетов, поскольку в ней имеется измерение длины отрезков, градусных мер углов, площадей геометрических фигур с точностью до сотых. Авторы [15] считают, что решение задач на клетчатой бумаге в большей степени, чем решение обычных задач, поможет развить геометрические представления, выработать вычислительные навыки, практические умения производить построение геометрических фигур.

В геометрии наглядное представление объединено со строгой логикой, и это является ее главной особенностью, выделяющей ее среди остальных наук. В математике, в отличие от других учебных предметов, изучаемые вопросы находятся в гораздо более тесной взаимосвязи [16].

По мнению автора [17], педагог может излагать утверждения в виде совмещенной формулы с целью повышения информационной емкости изложенного материала. Например, из всех треугольников [прямоугольников] с данным периметром наибольшую площадь имеет правильный треугольник [квадрат]. Данный педагогический прием мотивирует учащихся освоить материал за счет большей логической степени обобщения.

Идеи укрупнения рассматривались как часть фундаментальной философской проблемы диалектического единства части и целого еще в древности. Античные ученые Аристотель, Гераклит, Платон видели ее сущность

[2] *Методика преподавания математики / под ред. С.Е. Ляпина. М.: Учпедгиз, 1952. 451 с.*

[3] *Преподавание математики в сельской школе: (Из опыта работы) / сост. Ю.М. Колягин, О.А. Боковцев. М.: Просвещение, 1984. 144 с.*

в том, чтобы в исследуемом объекте выделить определенные стороны, компоненты, связи, т. е. различные элементы, составляющие данное целое, а также зависимость элементов между собой. В настоящее время наряду с философией идеи укрупнения рассматриваются в различных научных областях.

Ф. Кэджори, автор известной «Истории элементарной математики», призывает своих читателей «обратить внимание... на удивительные успехи, достигнутые в геометрии треугольника и круга во второй половине девятнадцатого столетия». «Открытие новых теорем в новейшее время, – подчеркивает он, – должно показаться нам еще более замечательным, если мы примем во внимание то, что фигуры эти подвергались уже внимательному рассмотрению как со стороны остроумных греков, так и со стороны длинного ряда геометров, появившегося после них» [18].

Плодотворная разработка геометрии треугольника и смежных с ней областей элементарной геометрии велась в течение всей первой половины текущего столетия и продолжается также в наши дни. В результате этих достижений «геометрия треугольника и тетраэдра» превратилась в стройную и официально признанную научную дисциплину. Тесное соприкосновение этой дисциплины с областью школьной геометрии, с одной стороны, и с обширным полем высшей геометрии, с другой, делает ее естественным «мостом» между первой и второй и объясняет большой интерес к ней со стороны преподавателей средней школы.

В [19] термин «Геометрия треугольника» является общепринятым, но требующим соответствующих пояснений, таких как двойные (индексные) однозначные обозначения замечательных точек, например H_i, M_i, N_i и т. д. Очень редко, практически никогда не используют обозначение J – инцентр (центр вписанной окружности). В данной книге используются барицентрические координаты. Считаем, что барицентрические и декартовы координаты дополнительны.

В пособии[4] задачи решаются классическими элементарными методами без применения формул аналитической геометрии.

Цель исследования – составление упражнений с использованием принципа двойственности, выделение из компонентов заданий теоремы геометрии треугольника.

МЕТОДИКА ПРОВЕДЕНИЯ ИССЛЕДОВАНИЯ

Исследование включало анализ:

– педагогической и методической литературы;

– учебного курса «Высшая алгебра и аналитическая геометрия» для студентов 1-го курса специальности «Химия, физика и механика материалов» Калмыцкого государственного университета;

– учебного курса «Математика» для студентов 1-го курса специальности «Экономическая безопасность» Калмыцкого государственного университета;

– школьного курса геометрии;

– книг, учебных пособий по геометрии треугольника.

[4]*Куланин Е.Д., Федин С.Н. Геометрия треугольника в задачах. Изд. 2-е, испр. и доп. М.: ЛИБРОКОМ, 2009. 208 с.*

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ

Предлагается следующая методика составления пар упражнений с использованием принципа двойственности (дополнительности) в методике преподавания математики (планиметрии).

1. Выбираем пару двойственных (условно двойственных) понятий.
2. Составляем упражнения с одним из таких понятий, решаем его.
3. На основе этого решения составляем и решаем упражнение с двойственным понятием.
4. Анализируем эти упражнения и ход их решения, ищем сходные характеристики.

Заметим, что принцип двойственности при составлении и решении упражнений в планиметрии можно использовать в разрезе решения прямой и обратной задач.

Некоторые планиметрические задачи единого государственного экзамена по математике могут считаться элементами новой геометрии треугольника.

Рассмотрим задание[5].

Точки A_1, B_1 и C_1 – основания высот треугольника ABC. Углы треугольника $A_1B_1C_1$ равны 90°, 60° и 30°. Найдите углы треугольника ABC.

Углы треугольника $A_1B_1C_1$, образованного основаниями высот ABC, равны 30°, 60°, 90°. Найти углы треугольника ABC.

Ответ: 45°, 75°, 60°, или 135°, 15°, 30°, или 120°, 15°, 45°, или 105°, 30°, 45°.

В ответе 4 варианта, один остроугольный и 3 тупоугольных.

$\angle A_1 = 180° - \angle A$;

$\angle A = (180° - 90°) : 2 = 45°$

$\angle B_1 = 180° - 2\angle B$;

$\angle B = (180° - 60°) : 2 = 60°$;

$\angle C = (180° - 30°) : 2 = 75°$.

Несмотря на то, что решение задачи арифметически выглядит очень простым, решить данную задачу будет достаточно сложно. Оценочное понимание смысла задания будет заключаться в понимании следствия из теоремы о пересечении высот треугольника [3]. В задачах ЕГЭ по планиметрии отсутствует метод координат. Только метод координат позволяет увидеть двойственность инцентра и ортоцентра.

Для понимания сути геометрии треугольника надо дать представление о теоремах двойственности центров окружностей.

Для составления геометрических задач можно в качестве «числового» образца использовать египетский треугольник 3, 4, 5 с углами 36,9° и 53,1°.

В данном упражнения в качестве длин сторон треугольника ABC берем пифагорову тройку. В этом случае координаты многих точек будут целочисленными. Вычисления не будут слишком громоздкими, и их можно будет провести без использования калькулятора, это способствует улучшению навыков устного счета. Таким образом, в качестве длин сторон треугольника можно выбрать числа 3, 4, 5; 5, 12, 13; 8, 15, 17; 7, 24, 25 и т. д.

[5]*ЕГЭ 2010. Математика. Типовые тестовые задания / под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. М.: Экзамен, 2010. 55 с.*

Решим данное задание другим методом. Условно назовем его метрическим, поскольку вычисляются длины сторон.

Для того чтобы учащиеся лучше понимали алгоритм решения, расположим стороны данного треугольника на осях координат, т. е. поместим вершину C в начало координат, а вершины A и B – на осях OX и OY соответственно (рис. 1 слева).

Рассмотрим треугольник $J_1J_2J_3$, образованный пересечением биссектрис внешних углов треугольника.

Следствие. Если точка J является центром вписанной окружности треугольника ABC, то эта же точка является ортоцентром треугольника $J_1J_2J_3$, т. е. $J(ABC)\equiv H(J_1J_2J_3)$ (рис. 1 слева) [5]. Данное следствие позволяет провести аналогию с известными в математической логике законами двойственности А. де Моргана.

На рис. 1 справа точки J, A, B, C, J_1, J_2, J_3 заменены на H, H_1, H_2, H_3, A, B, C соответственно. Точка пересечения высот треугольника ABC (рис. 1 слева) является центром вписанной окружности для высотного треугольника $H_1H_2H_3$, а точки A, B, C являются центрами вневписанных окружностей для высотного треугольника. На рис. 1 высотный треугольник $H_1H_2H_3$ обозначен как ABC. В данном примере преимуществом использования принципа двойственности по сравнению с классическим методом является то, что точки чертежа становятся двойственными и требующими нейтрального цифрового представления в координатной плоскости т. е. если в символической записи используем обозначения J_1, J_2, J_3, то достаточно стереть знаки J, а вместо J в треугольнике ABC поставить H, тогда вместо знаков A, B, C нужно поставить знаки ортотреугольника $H_1H_2H_3$ для того, чтобы показать на доске эти механические преобразования с буквами.

Покажем, что центр вписанной окружности египетского треугольника ABC является точкой пересечения высот треугольника $J_1J_2J_3$, образованного биссектрисами внешних углов.

Найдем координаты вершин треугольника $J_1J_2J_3$.

J_1 является точкой пересечения прямых

$$y=-x \text{ и } y=\frac{x}{2} \Rightarrow J_1(-2;2).$$

Аналогично

$$y=-x \text{ и } y=3(x-4) \Rightarrow J_2(3;-3),$$

$$y=\frac{x}{2}+3 \text{ и } S=(S_t)_{t\geq 0}.$$

Таким образом, точка $J(1;1)$ является центром вписанной окружности (инцентром) в треугольнике $A(0;0)B(0;3)C(4;0)$, а точки $J_1(6;6)$, $J_2(3;-3)$, $J_3(-2;2)$ являются центрами вневписанных окружностей, радиусы которых $r_1=6$; $r_2=3$; $r_3=2$. Обратные величины радиусов связаны формулой

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3},$$

$$1=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}.$$

Данное цифровое тождество является арифметической моделью теоремы о радиусах внутри и вневписанных окружностей.

В новом $\Delta A(6;6)B(3;-3)C(-2;2)$ (рис. 1 справа) точка (1;1) является ортоцентром (точкой пересечения высот) H, в котором точки (0;0), (0;3), (4;0) являются основаниями высот.

На координатной плоскости надо показать сущность доказательства теоремы о пересечении трех высот в одной точке, проведенного Гауссом на основе принципа двойственности, когда ортоцентр треугольника ABC одно временно является центром вписанной окружности для треугольника, образованного основаниями высот.

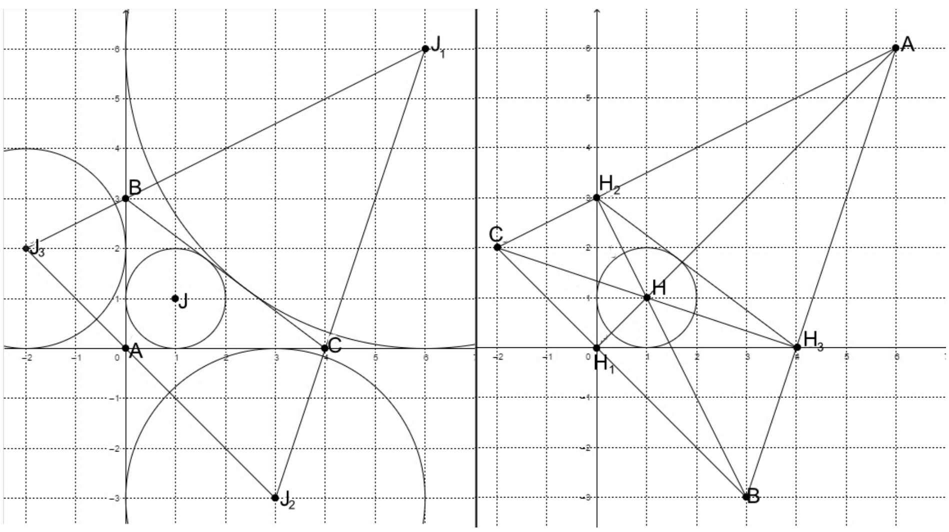

Рис. 1. *Двойственность точек*

Проверим, является ли точка пересечения высот H (ортоцентр) центром вписанной окружности J (инцентр) для треугольника $H_1H_2H_3$, образованного основаниями высот (ортотреугольник). Для этого покажем, что точка H равноудалена от сторон треугольника $H_1H_2H_3$ (рис. 2).

Возьмем треугольник ABC со следующими характеристиками:

$$AB = 6,\ AC = 4,\ \angle A = 45^\circ .$$

Расположим точку A в начале координат, а точку B на оси OX, тогда вершины треугольника ABC имеют координаты $A(0;0)$, $B(6;0)$, $C(4;4)$. Параметры данного треугольника выбраны не случайно. Очевидно, что треугольник с углом 45° очень удобен для построения на клетчатой бумаге. При этом сторона AC и высота BH_2 проходят по диагоналям клеток тетради. Если длина стороны AB кратна 2, то центр описанной окружности находится в узлах клеток, т. е. имеет целочисленную координату. Длину стороны AB берем кратную $\sqrt{2}$ для того, чтобы координаты точки B были целочисленны.

Вычислим координаты точки H_1:

$$H_1 = AH_1 \cap BC ,$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{x}{2} \\ y = -2(x-6) \end{cases} \Rightarrow H_1(4{,}8;2{,}4) .$$

Аналогично $H_2(3;3)$, $H_3(4;0)$.

Далее находим уравнения сторон ортотреугольника $H_1H_2H_3$:

$$H_1H_2 : \frac{x-4{,}8}{3-4{,}8} = \frac{x-2{,}4}{3-2{,}4} \Rightarrow x + 3y - 12 = 0 ,$$

$$H_1H_3 : \frac{x-4{,}8}{4-4{,}8} = \frac{y-2{,}4}{0-2{,}4} \Rightarrow 3x - y - 12 = 0 ,$$

$$H_2H_3 : y = -3(x-4) \Rightarrow 3x + 4y - 12 = 0 .$$

Для нахождения расстояния от ортоцентра до сторон высотного треугольника подставим координаты точки H в уравнение и разделим на нормирующий множитель $\sqrt{10}$.

$$\rho\left(H; H_1H_2\right) = \frac{|4+6-12|}{\sqrt{10}} = \frac{2}{\sqrt{10}} ,$$

$$\rho\left(H; H_1H_3\right) = \frac{|12-2-12|}{\sqrt{10}} = \frac{2}{\sqrt{10}} ,$$

$$\rho\left(H; H_2H_3\right) = \frac{|12+2-12|}{\sqrt{10}} = \frac{2}{\sqrt{10}} .$$

Таким образом, точка $H(4;2)$ равноудалена от сторон ортотреугольника, т. е. она является центром вписанной окружности, $H(ABC) \equiv J(H_1H_2H_3)$.

Нормальное уравнение прямой показывает необходимость аналитического исследования, поскольку расстояние от ортоцентра до сторон ортотреугольника сложно проверить на чертеже из-за малой величины.

Вычислим стороны высотного треугольника:

$$H_1H_2^{\ 2} = 1{,}8^2 + 0{,}6^2 = 0{,}6^2(3^2+1^2) \Rightarrow H_1H_2 = 0{,}6\sqrt{10} ,$$

$$H_1H_3^{\ 2} = 0{,}8^2 + 2{,}4^2 = 0{,}8^2(3^2+1^2) \Rightarrow H_1H_3 = 0{,}8\sqrt{10} ,$$

$$H_2H_3^{\ 2} = 1^2 + 3^2 = 10 \Rightarrow H_2H_3 = \sqrt{10} ,$$

$$\Delta H_1H_2H_3 : 0{,}6\sqrt{10}; 0{,}8\sqrt{10}; \sqrt{10} .$$

Обратите внимание на то, что данный треугольник подобен египетскому 3, 4, 5, использованному в предыдущей задаче.

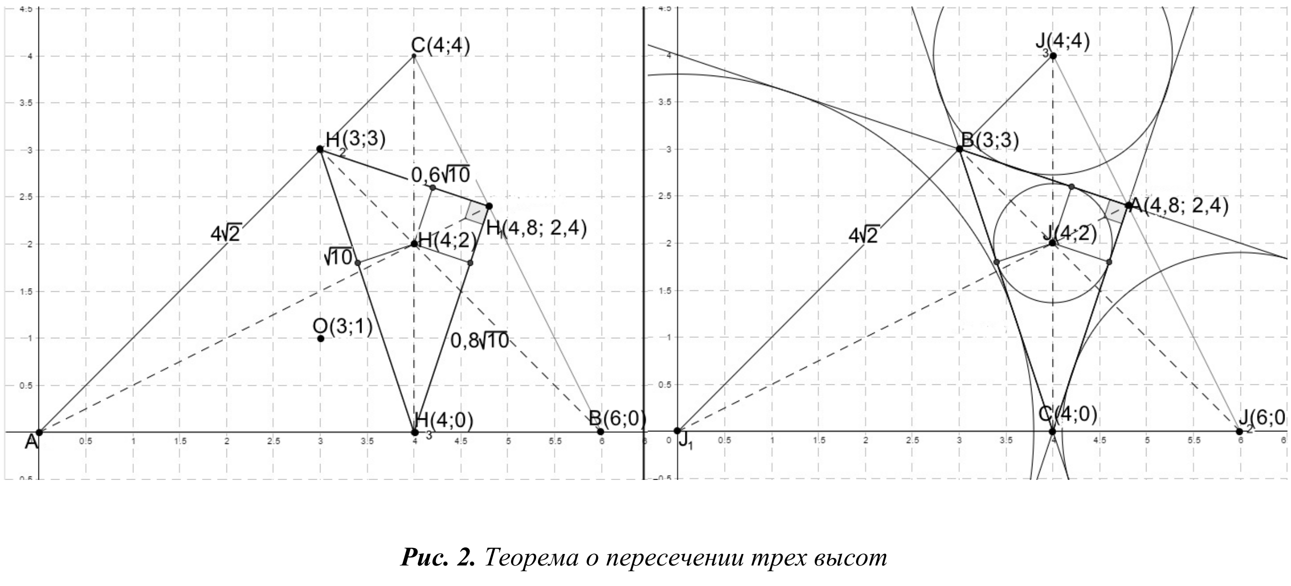

Рис. 2. *Теорема о пересечении трех высот*

Далее покажем, что треугольник с длинами сторон $4\sqrt{2}$, 6 и углом 45° подобен треугольнику $J_1J_2J_3$ из предыдущей задачи.

Найдем угол J_3 из скалярного произведения векторов:

$$\overrightarrow{J_1J_3}=(8;4);\ \overrightarrow{J_2J_3}=(3;9),$$

$$\overrightarrow{J_1J_3}\cdot\overrightarrow{J_2J_3}=\left|\overrightarrow{J_1J_3}\right|\cdot\left|\overrightarrow{J_2J_3}\right|\cdot\cos\hat{J}_3,$$

$$\cos J_3=\frac{\overrightarrow{J_1J_3}\cdot\overrightarrow{J_2J_3}}{\left|\overrightarrow{J_1J_3}\right|\cdot\left|\overrightarrow{J_2J_3}\right|}=\frac{8\cdot3+4\cdot9}{4\sqrt{5}\cdot3\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\hat{J}_3=45°.$$

Таким образом, треугольники подобны с коэффициентом $\sqrt{2}$.

Рассмотрим еще один пример.

Возьмем египетский треугольник ABC (рис. 3), у которого AB=5, BC=3, AC=4.

Стороны AB и AC расположим на осях OY и OX соответственно.

Построим в этом треугольнике вписанную окружность. Вычислим ее радиус:

$$r=\frac{a+b-c}{2}=\frac{3+4-5}{2}=1.$$

И вот здесь уже относительно трудно построить вписанную окружность без выделения точек касания. Простые (с целочисленными координатами) точки касания $D(0;1)$, $E(1;0)$, $J(1;1)$, $F(x;y)$.

Найдем координаты точки F.

Уравнение прямой AB:

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1\Rightarrow y=-\frac{3}{4}x+3\Rightarrow k=-\frac{3}{4},$$

$$\left.\begin{array}{l}AB\perp JF\Rightarrow k_{JF}=\dfrac{4}{3}\\ J(1;1)\end{array}\right\}\Rightarrow y=\frac{4}{3}(x-1)+1.$$

Уравнение прямой JF:

$$y=\frac{4}{3}(x-1)+1.$$

Точка пересечения этих прямых F имеет координаты (1,6; 1,8).

Проверка:

$$BF=\sqrt{1{,}6^2+1{,}2^2}=0{,}4\sqrt{4^2+3^2}=0{,}4\sqrt{5^2}=2,$$

$$AF=\sqrt{2{,}4^2+1{,}8^2}=0{,}6\sqrt{4^2+3^2}=0{,}6\sqrt{5^2}=3.$$

Треугольник $D(0;1)E(1;0)F(1{,}6;1{,}8)$, вершины которого лежат на вписанной в ΔABC окружности, можно назвать инцентрическим по отношению к ABC.

Здесь важно выразить двойственность двух центров $J(\Delta ABC)\equiv O(\Delta DEF)$.

Задача сильно усложняется для непрямоугольных треугольников. В заданиях ЕГЭ предлагаются треугольники нестандартного положения.

Пример. Найдите площадь треугольника ABC. Размер каждой клетки 1×1 см. Ответ дайте в квадратных сантиметрах (рис. 4).

Полезно предложить вычисленный ранее треугольник DEF (рис. 3), но как задание с продолжением. Найти к нему треугольник ABC, который согласно теории называется тангенциальным.

Проведем перпендикуляры к радиусам описанной окружности. Как отрезки касательных, они будут равны, и их точки пересечения образуют треугольник ABC.

Вычислим метрические параметры треугольника DEF:

$$DE=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2},$$
$$DF=\sqrt{1{,}6^2+0{,}8^2}=0{,}8\sqrt{2^2+1^2}=0{,}8\sqrt{5}$$

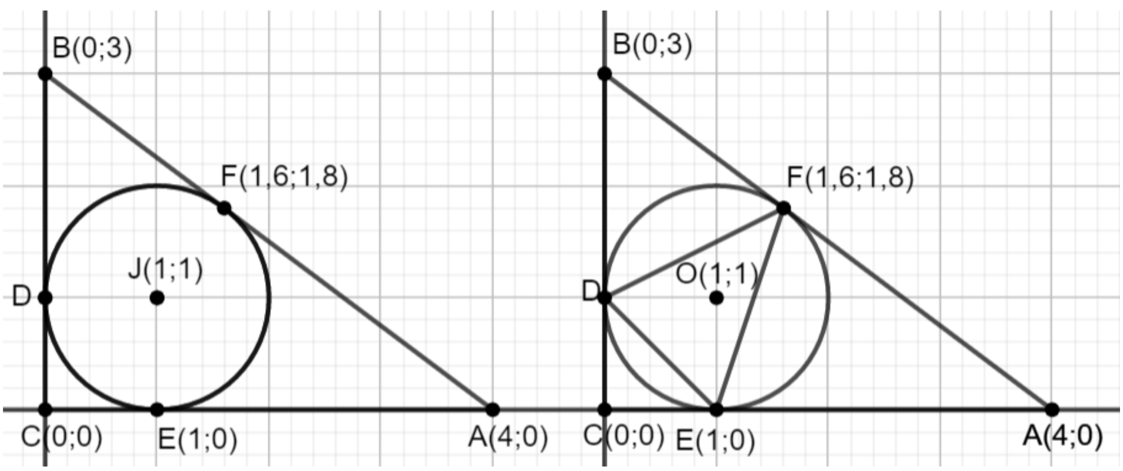

Рис. 3. *Окружность, вписанная в египетский треугольник*

$$EF = \sqrt{0{,}6^2 + 1{,}8^2} = 0{,}6\sqrt{1^2 + 3^2} = 0{,}6\sqrt{10}\ .$$

Для большей наглядности умножим каждую сторону на $\sqrt{2{,}5}$ и расположим в стандартной форме (рис. 5).

$$E_1F_1 = 0{,}6\sqrt{10} \cdot \sqrt{2{,}5} = 3\ ,$$

$$D_1E_1 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2{,}5} = \sqrt{5}\ ,$$

$$D_1F_1 = 0{,}8\sqrt{5} \cdot \sqrt{2{,}5} = 2\sqrt{2}\ .$$

Как назвать треугольник, образованный точками касания вписанной окружности?

Используем цифробуквенные символы A_1(1;0), B_1(0;1), C_1(?;?).

Вычислим стороны B_1C_1 и A_1C_1 по обобщенной теореме Пифагора (теореме косинусов).

$$B_1C_1^{\ 2} = 1 + 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{12}{5} \Rightarrow B_1C_1 = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\ ,$$

$$A_1C_1^{\ 2} = 1 + 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{18}{5} \Rightarrow A_1C_1 = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\ .$$

Стороны треугольника $A_1B_1C_1$:

$$\sqrt{2}; \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}; \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\ .$$

Так как $A_1B_1 = \sqrt{2}$, то умножим каждую сторону на $\sqrt{2{,}5}$:

$$\sqrt{5}\ ,\ \sqrt{6}\ ,\ 3.$$

Таким образом, были составлены упражнения с использованием принципа двойственности. Из компонентов заданий были выделены теоремы геометрии треугольника.

Во многих случаях приложения математики к практике используются приближенные величины. Геометрические задачи и задачи на проценты дают много материала для приближенных вычислений. Следовательно, элементарные задачи на вычисление периметра и площади прямоугольника 3×4 можно сделать более содержательными, дополнив условие задания нахождением процентного отношения.

Задача.

а) Найти площадь и периметр прямоугольника со сторонами: a=3, b=4.

б) Найти стороны прямоугольника, имеющего *наибольшую площадь (Здесь и далее выделено автором. – А. Б.)* и такой же *периметр*. Вычислить *площадь* S_1 этой фигуры.

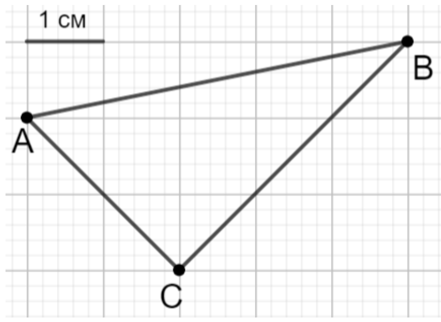

Рис. 4. *Пример задачи с нестандартным положением треугольника*

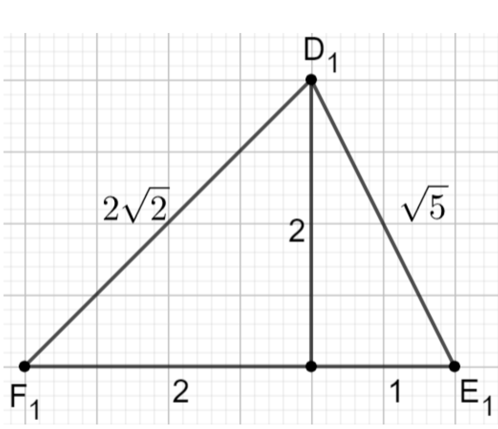

Рис. 5. *Треугольник $D_1E_1F_1$*

в) Сколько процентов составляет *площадь* прямоугольника 3×4 от S_1?

Составим *двойственную* задачу.

а) Найти площадь и периметр прямоугольника со сторонами: a=3, b=4.

б) Найти стороны прямоугольника, имеющего *наименьший периметр* и такую же *площадь*. Вычислить *периметр* P_1 этой фигуры.

в) Сколько процентов составляет *периметр* прямоугольника 3×4 от P_1?

При составлении двойственной задачи заменяем в пункте б «наибольшую площадь» на «наименьший периметр», «такой же периметр» на «такую же площадь», «периметр» на «площадь», в пункте в – «площадь» на «периметр». Условия пункта а не изменяем, так как ответы к нему используются в пунктах б, в.

Эти две задачи можно изложить в более компактной форме:

а) Найти площадь и периметр прямоугольника со сторонами: a=3, b=4.

б) Найти стороны прямоугольника, имеющего *наибольшую площадь [наименьший периметр]* и такой [такую] же *периметр [площадь]*. Вычислить площадь S_1 [периметр P_1] этой фигуры.

в) Сколько процентов составляет *площадь [периметр]* прямоугольника 3×4 от $S_1[P_1]$?

Решение.

а) $S=a\cdot b=3\cdot 4=12$, $P=2(a+b)=14$.

б) Из всех прямоугольников с P=14 наибольшая площадь будет у квадрата.

Сторона квадрата a=14:4=3,5. Площадь квадрата S_1=3,5·3,5=12,25.

в) $S:S_1$=12:12,25=48:49≈98,5 %.

В пункте в решения использовалось основное свойство дроби для упрощения вычислений.

Решение двойственной задачи.

а) $S=a\cdot b=3\cdot 4=12$, $P=2(a+b)=14$.

б) Из всех прямоугольников с S=12 наименьший периметр будет у квадрата.

Сторона квадрата:

$$a=\sqrt{12}=2\sqrt{3}\,.$$

Периметр квадрата:

$$P_1=2\sqrt{3}\cdot 4=8\sqrt{3}\,.$$

в) $\dfrac{P}{P_1}=\dfrac{14}{8\sqrt{3}}=\dfrac{14\sqrt{3}}{24}\approx 112\%$.

После этого переходим к равнобедренной трапеции со сторонами 5, 2,5, 10.

Данную задачу можно дать учащимся, начиная с 8 класса.

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Чаще всего учащиеся, поступающие на первые курсы вуза, обладают минимумом необходимых знаний по математике. Поэтому на многих специальностях университета вводятся курсы дополнительных разделов математики. Для закрепления знаний первокурсников преподаватели используют учебники старших классов. При изучении основ математики рассматривают темы аналитической геометрии: уравнения прямой, расстояние между двумя точками, что уже фактически было пройдено в старших классах. Поэтому целесообразно для закрепления пройденного материала внести элемент новизны в повторяемый материал, вызывающий интерес студента к дальнейшему углубленному изучению предмета.

Ранее в [20] были систематизированы фигуры с целочисленными сторонами и фиксированными углами в форме таблиц для составления геометрических упражнений и численной проверки теорем.

При построении точных чертежей в координатах, заданных целыми, рациональными числами, в объяснении темы всегда можно выделить факты геометрии треугольника. Геометрия треугольника позволяет найти решение отдельных вопросов, в частности выделения унарных обозначений понятий (замечательных точек), применения сдвоенных обозначений.

Зачастую в задачах курса геометрии параметры сторон, углов, расположение треугольника не указаны. Поэтому изображение треугольника на доске и в тетрадях обычно задано случайно. В составленных упражнениях оси координат не являются обязательным компонентом, они нужны для того, чтобы выделить стандартное положение треугольника. Такой чертеж позволяет увидеть соотношение элементов фигуры, способствует развитию глазомера у учащихся.

Методы аналитической геометрии дают возможность проводить вычисления без использования логических рассуждений, но их всегда можно дополнить. Использование декартовой системы координат позволяет увидеть двойственность точек и дает прирост качественно новой информации. Нормальное уравнение прямой показывает необходимость аналитического исследования в тех случаях, когда расстояние между точками сложно проверить на чертеже из-за малой величины. Некоторые планиметрические задачи единого государственного экзамена по математике могут считаться элементами новой геометрии треугольника. В то же время в этих задачах отсутствует метод координат. В барицентрических координатах не выполняется теорема Пифагора, расстояние между двумя точками находят в более сложной форме. Поэтому расстояния между ближними и дальними точками в барицентрических координатах так явно не очевидны как для прямоугольных координат.

По отдельным темам были дополнены предложенные выше упражнения с использованием принципа двойственности. При составлении упражнений были подобраны значения, которые позволили получить удобный ответ. В объяснении из компонентов заданий были выделены теоремы из геометрии треугольника. Основные результаты исследования были обсуждены в выступлениях на научно-практических конференциях по методике укрупнения дидактических единиц (УДЕ) для учителей математики в г. Элисте.

Предлагаемый сущностный подход предполагает выбор варианта с наименьшим объемом информации. По нему проводится качественный и количественный отбор полученных на занятии знаний. В качестве базисных информационных единиц взяты буквы латинского алфавита и цифры. Буквы латинского алфавита однозначно определят так называемую новую геометрию замечательных точек треугольника. При этом обозначения всех этих замечательных точек не изменяются и являются общими для системы обозначений в соответствующих заданиях и учебниках.

Применительно к преподаванию математики укрупнение информационных единиц достигается посредством представления понятий к буквенным обозначениям и цифровым вариантам записи канонизированных понятий, что важно при объяснении заданий и, следовательно, важно для качества усвоения информации.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Составлены упражнения с использованием принципа двойственности. Из компонентов заданий выделены теоремы геометрии треугольника. Обосновано использование декартовой системы координат для составленных упражнений. Показано, какие именно параметры следует выбирать в условии задачи. Предложена методика составления пар упражнений. При помощи этих упражнений можно ознакомить учащихся с интересными фактами новой геометрии треугольника и при этом провести повторение пройденного материала по темам: «Расстояние между двумя точками», «Общее уравнение прямой», «Уравнение прямой с угловым коэффициентом», «Угол между двумя прямыми», «Условие перпендикулярности и параллельности двух прямых», «Уравнение прямой в отрезках», «Нормальное уравнение прямой», «Определение расстояния от точки до прямой», «Понятие вектора», «Скалярное произведение векторов» и др.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дружинин Б.Л. Отец проективной геометрии // Математика для школьников. 2019. № 1. С. 25–29.
2. Принцип дополнительности и материалистическая диалектика / отв. ред. Л.Б. Баженов. М.: Наука, 1976. 367 с.
3. Понарин Я.П. Элементарная геометрия. Т. 1: Планиметрия, преобразования плоскости. М.: МЦНМО, 2004. 312 с.
4. Дворянинов С.В. Всероссийский съезд преподавателей и учителей математики 6-7 декабря 2018 года в МГУ // Математика в школе. 2019. № 2. С. 58–60.
5. Степкина М.А. Модель методики формирования готовности студентов первого курса к изучению математики в вузе // Известия Волгоградского государственного педагогического университета. 2018. № 7. С. 42–48.
6. Сохор А.М. Об анализе внутренних связей учебного материала // Новые исследования в педагогических науках. 1965. № 4. С. 56–66.
7. Саввина О.А., Мельников Р.А., Тарасова О.В. Академик, гражданин, автор учебников-долгожителей (к 100-летию со дня рождения Алексея Васильевича Погорелова) // Математика в школе. 2019. № 1. С. 58–68.
8. Крачковский С.М. О развитии вариативного мышления при обучении математике // Математика в школе. 2014. № 10. С. 29–38.
9. Смирнов А.А. Вопросы методики программированного обучения // Новые исследования в педагогических науках. 1965. № 4. С. 9–14.
10. Чичигин В.Г. Методика преподавания геометрии. М.: Учпедгиз, 1959. 392 с.
11. Буфеев С.В., Штраус И.М. Особенности преподавания математики в лицее при МГТУ им. Н.Э. Баумана: стендовые домашние задания // Математика в школе. 2014. № 9. С. 45–48.
12. Семенов А.Л. «Две культуры» современной школы // Математика в школе. 2014. № 5. С. 21–26.
13. Эрдниев П.М. Развитие навыков самоконтроля при обучении математике. М.: Учпедгиз, 1957. 68 с.
14. Ковалева Г.И., Слета Ю.О. Содержательный компонент методики обучения учащихся основной школы анализу условия планиметрической задачи // Известия Волгоградского государственного педагогического университета. 2018. № 4. С. 49–53.
15. Смирнов В.А., Смирнова И.М. Геометрия на клетчатой бумаге. М.: МЦНМО, 2016. 264 с.
16. Александров А.Д. О геометрии // Математика в школе. 1980. № 4. С. 56–62.
17. Харламов И.Ф. Как активизировать учение школьников. Минск: Народная асвета, 1975. 207 с.
18. Кэджори Ф. История элементарной математики с указаниями на методы преподавания. Одесса: Mathesis, 1910. 368 с.
19. Мякишев А.Г. Элементы геометрии треугольника. М.: МЦНМО, 2002. 32 с.
20. Баталаев А.В. Метод целочисленного представления теорем геометрии в обучении школьников // Известия Волгоградского государственного педагогического университета. 2016. № 2. С. 58–66.

REFERENCES

1. Druzhinin B.L. Founding Father of projective geometry. *Matematika dlya shkolnikov*, 2019, no. 1, pp. 25–29.
2. Bazhenov L.B., ed. *Printsip dopolnitelnosti i materialisticheskaya dialektika* [Complementarity principle and materialistic dialectics]. Moscow, Nauka Publ., 1976. 367 p.
3. Ponarin Ya.P. *Elementarnaya geometriya. Planimetriya, preobrazovaniya ploskosti* [Elementary geometry. Plane geometry, transformations of planes]. Moscow, MTsNMO Publ., 2004. Vol. 1, 312 p.
4. Dvoryaninov S.V. All-Russian forum of lectures and mathematics teachers on the 6-7 December 2018 at Moscow State University. *Matematika v shkole*, 2019, no. 2, pp. 58–60.
5. Stepkina M.A. Model of methodology of formation of first-year students’ readiness to study mathematics at the university. *Izvestiya Volgogradskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta*, 2018, no. 7, pp. 42–48.
6. Sokhor A.M. Concerning the analysis of internal relations of educational material. *Novye issledovaniya v pedagogicheskikh naukakh*, 1965, no. 4, pp. 56–66.
7. Savvina O.A., Melnikov R.A., Tarasova O.V. Academician, citizen, author of textbooks long-livers (to the 100 anniversary since the birth of Alexey Vasilyevich Pogorelov). *Matematika v shkole*, 2019, no. 1, pp. 58–68.

8. Krachkovskiy S.M. About development of variable thinking when training in mathematics. *Matematika v shkole*, 2014, no. 10, pp. 29–38.
9. Smirnov A.A. The issues of methods of computer-based learning. *Novye issledovaniya v pedagogicheskikh naukakh*, 1965, no. 4, pp. 9–14.
10. Chichigin V.G. *Metodika prepodavaniya geometrii* [Methods of teaching geometry]. Moscow, Uchpedgiz Publ., 1959. 392 p.
11. Bufeev S.V., Shtraus I.M. Features of teaching mathematics in lyceum at MGTU of N.E. Bauman: bench homeworks. *Matematika v shkole*, 2014, no. 9, pp. 45–48.
12. Semenov A.L. “Two cultures” at modern school. *Matematika v shkole*, 2014, no. 5, pp. 21–26.
13. Erdniev P.M. *Razvitie navykov samokontrolya pri obuchenii matematike* [The development of self-control skills when teaching mathematics]. Moscow, Uchpedgiz Publ., 1957. 68 p.
14. Kovaleva G.I., Sleta Yu.O. Contents of teaching the analysis of planimetric tasks in secondary school. *Izvestiya Volgogradskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta*, 2018, no. 4, pp. 49–53.
15. Smirnov V.A., Smirnova I.M. *Geometriya na kletchatoy bumage* [Geometry on squared paper]. Moscow, MTsNMO Publ., 2016. 164 p.
16. Aleksandrov A.D. About the geometry. *Matematika v shkole*, 1980, no. 4, pp. 56–62.
17. Kharlamov I.F. *Kak aktivizirovat uchenie shkolnikov* [How to intensify the teaching of students]. Minsk, Narodnaya asveta Publ., 1975. 207 p.
18. Kedzhori F. *Istoriya elementarnoy matematiki s ukazaniyami na metody prepodavaniya* [A History of Elementary Mathematics with hints on methods of teaching]. Odessa, Mathesis Publ., 1910. 368 p.
19. Myakishev A.G. *Elementy geometrii treugolnika* [The elements of triangle geometry]. Moscow, MTsNMO Publ., 2002. 32 p.
20. Batalaev A.V. Method of integer representation of geometry theorems in teaching pupils. *Izvestiya Volgogradskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta*, 2016, no. 2, pp. 58–66.

USING THE DUALITY PRINCIPLE WHEN CONSTRUCTING EXERCISES AT THE GEOMETRY LESSONS

A.V. Batalaev, postgraduate student
B.B. Gorodovikov Kalmyk State University, Elista (Russia)

Keywords: duality principle; constructing exercises; triangle geometry; analytical geometry; integer representation method; checking theorems.

Abstract: Geometry is one of the complex disciplines where many facts are interconnected. It is possible to develop the idea of facts interrelations through correlation using the duality principle. The duality principle is known in projective geometry, mathematical logic. This principle is clearly pronounced in one of the theorems of new triangle geometry. The traditional analytical geometry course does not study the facts of new triangle geometry. To reinforce many topics of the analytical geometry course, for example, “The distance between two points”, “The symmetrical form of the equation of a line”, “The angle between two lines”, it is reasonable to consider some facts from the new triangle geometry in the Cartesian coordinate system. Thus, an element of novelty is introduced to the reviewed material. The guidebooks on triangle geometry solve tasks through classical approaches or applying barycentric coordinates not using analytical geometry formulas. The paper proposes the constructing technique for the couples of exercises using the duality principle in the plane geometry teaching methods. Tasks are constructed for the Cartesian coordinate system as this allows demonstrating the duality of points in the drawings. In the composed exercises, two drawings are constructed in parallel columns. In different cases, the points can be the triangle-apexes, an orthocenter, or a height base. The initial triangle sides are located on the axes of coordinates, and their side lengths set up Pythagorean triple for better understanding the task-solving algorithm by the students. The symmetrical form of the equation of a line shows the necessity of analytical study since it is difficult to check the distance from the orthocenter to the orthotriangle sides in the drawings due to the small value. For many such information units, the aggregation relationships (whole-part) are set up, reflecting the geometric embedding of components.