УДК 378.147
doi: 10.18323/3034-2996-2025-3-62-3

Технология организации решения математических задач с использованием концепции поэтапного формирования умственных действий и критериального оценивания при обучении будущих учителей математики

Макеева Ольга Викторовна, кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры высшей математики
Ульяновский государственный педагогический университет имени И.Н. Ульянова, Ульяновск (Россия)

E-mail: mov_ulspu@mail.ru ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4345-2296

Поступила в редакцию 14.07.2025 *Пересмотрена 13.08.2025* *Принята к публикации 16.09.2025*

Аннотация: Математическое знание в силу специфики его освоения через решение задач играет особую роль в процессе развития различных форм мышления. В ходе решения математических задач за счет интериоризации эвристических приемов происходит формирование культурной формы творческого мышления. На усвоение аналитических эвристик могут оказывать влияние специальные приемы организации процесса обучения. В работе описан инструмент организации обучения решению математических задач как процесса, направленного на формирование ориентиров – эвристик согласно третьему типу ориентировки теории поэтапного формирования умственных действий П.Я. Гальперина. Приведены результаты формирующего эксперимента по освоению предложенной конструкции (схемы организации мыслительной деятельности, далее – ОМД) будущими учителями математики в процессе изучения интегрального исчисления функций одной переменной. С помощью *U*-критерия Манна – Уитни получены статистически значимые различия в уровнях сформированности эвристики «Анализ постановки задачи» в контрольной и экспериментальной группах. В связи с малочисленностью групп проведен качественный анализ результатов эксперимента. Показана возможность использования схемы ОМД для реализации стратегии полного усвоения и формирующего оценивания. Как предполагается, систематическое использование схемы ОМД в процессе обучения решению задач реализует технологию обучения с третьим типом ориентировки и целесообразно при подготовке учителей математики.

Ключевые слова: обучение решению математических задач; теория поэтапного формирования умственных действий; третий тип ориентировки; формирующее оценивание; полное усвоение; подготовка учителя математики; интегральное исчисление функций одной переменной.

Для цитирования: Макеева О.В. Технология организации решения математических задач с использованием концепции поэтапного формирования умственных действий и критериального оценивания при обучении будущих учителей математики // Доказательная педагогика, психология. 2025. № 3. С. 39–53. DOI: 10.18323/3034-2996-2025-3-62-3.

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема освоения математики как учебного предмета имеет долгую историю. Каждое новое поколение обучающихся привносит свои особенности в проблемное поле. Они связаны со спецификой состояния образовательного пространства, его зависимостью от социокультурной среды и уровня развития технологий, а потому требуют актуального изучения.

В современных условиях, когда активно развиваются и используются электронные вычислители, умение раскрыть смысл и значение математического знания является нетривиальной проблемой. Для аудитории обучающихся поколения Z, так называемых «цифровых аборигенов», необходимо «выстраивать» понимание математического текста как специально организованный процесс. Освоение курса математики предполагает преобразование «готового» математического знания, зафиксированного в учебниках, справочниках, информационных системах, в знание «становящееся» [1]. «Динамической» в указанном смысле структурой представления математического знания является традиционная математическая задача. Она содержит прямое обращение к решателю в виде вопроса и создает возможности для дискурсивного анализа задачной ситуации. Стоит признать, что в современном мире информационной насыщенности учебный процесс в его традиционном варианте не реализует эти возможности достаточно полно – у обучающихся в большинстве случаев не формируется модель математической деятельности[1].

Теоретической основой исследования выступила деятельностная теория психики А.Н. Леонтьева (1903–1979) [2], оказавшая значительное влияние на отечественную педагогику. В рамках исследуемой проблемы особый интерес представляет развитие ее положений

[1] *Макеева О.В., Фолиадова Е.В. Учитель математики для поколения Z: освоение математического содержания через конструирование баз знаний // Развитие общего и профессионального математического образования в системе национальных университетов и педагогических вузов: сборник материалов 40-го Международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов. Брянск: ИП Худовец Р.Г., 2021. С. 416–419. EDN: KMLXNL.*

в теории учебной деятельности Д.Б. Эльконина (1904–1984) и В.В. Давыдова (1930–1998), заложившей основы деятельностного подхода в образовании [3; 4]. В качестве единого теоретического основания различных систем развивающего обучения можно рассматривать идеи Л.С. Выготского (1896–1934) о соотношении обучения и умственного развития [5].

В исследованиях А.Н. Леонтьева и его учеников находят свои истоки работы П.Я. Гальперина (1902–1989) [6]. С опорой на ориентировочные основы в учении о деятельности научной школой П.Я. Гальперина была разработана теория поэтапного формирования умственных действий. Это теория обучения как перехода внешней деятельности во внутренний план в ходе интериоризации, в которой описаны процессы и условия формирования осмысленных действий по генерации знаний субъекта – представлений и понятий об объектах и их связях [7]. К ним относятся: активная ориентировка субъекта в условиях осуществления действия, где принципиальное значение имеет третий тип ориентировки (полная и обобщенная ориентировочная основа действия); наличие средств действия как орудий психической деятельности (эталонов, мер, знаков); понимание процесса возникновения образов восприятия и мышления как перехода внешних действий в план операций, осуществляемых в уме. Теория П.Я. Гальперина хорошо известна в отечественной психологии и педагогике, она получила широкое международное признание и продолжает развиваться в современных исследованиях [8; 9]. Обучение, построенное с учетом ее положений, обладает большей эффективностью по сравнению с традиционной системой, так как управляет процессом формирования умственных действий, в том числе качествами действий. Положительными примерами могут служить образовательные программы для начальной школы [6]. Однако в современной системе высшего педагогического образования данный подход активного применения не находит.

Изучение психолого-педагогических механизмов обучения неразрывно связано с проблемой оценивания результатов учебной деятельности. В настоящее время достаточно широкое распространение получила система критериального оценивания, которое по существу является оцениванием формирующим. Система базируется на шестиуровневой таксономии образовательных целей [10], построенной в 1956 г. американским психологом методов обучения Б. Блумом (англ. Benjamin Samuel Bloom, 1913–1999). В 1960-е гг. в соавторстве с американским психологом Дж. Кэрролом (англ. John Bissell Carroll, 1916–2003) им же была сформулирована идея полного усвоения. В ее основе лежит гипотеза о том, что полное усвоение материала доступно каждому ученику. Для этого в качестве инварианта, неизменяемого параметра образовательного процесса, нужно выбрать результаты обучения. Формулировка учебных целей может осуществляться через описание результатов обучения, выраженных в действиях обучающихся. Критерии оценивания определяются задачами учебной работы и представляют перечень видов действий обучающегося, которые он осуществляет и должен освоить в ходе работы. В конкретных ситуациях такая процедура достаточно естественно конструируется и операционализируется. В настоящее время за рубежом система формирующего оценивания широко распространена на всех ступенях образования. Однако для российских школ и особенно вузов эта стратегия оценивания остается инновационной [11].

Исследование посвящено подготовке будущих учителей математики. В фокусе внимания находится проблема организации процесса решения учебных математических задач, адекватного психологическим характеристикам процесса мышления и направленного на формирование модели математической деятельности.

Цель работы – повышение эффективности формирования предметно-методических компетенций у будущих учителей математики через разработку и внедрение инструмента обучения решению задач, реализующего концепцию третьего типа ориентировки П.Я. Гальперина и принципы формирующего оценивания.

2. МЕТОДИКА ПРОВЕДЕНИЯ ИССЛЕДОВАНИЯ

2.1. Исследуемый инструмент и теоретическая основа

Для организации учебной работы по решению математических задач, в которой обучение отвечает третьему типу ориентировки и обучающимся представлены критерии оценивания их достижений, автором была разработана специальная структура – «Инструкционная схема организации мыслительной деятельности при решении математических задач» (схема ОМД) (таблица 1) [1]. Использование схемы призвано обеспечить выведение во внешний план и отражение во внешней речи процессов, которые при сформированном умении решать задачи происходят в свернутом виде в уме.

2.2. Цель и гипотеза эксперимента

Для изучения возможностей схемы ОМД в качестве инструмента, который призван организовать ориентировку и обучить ей как аналитической эвристике, автором был проведен формирующий эксперимент. Цель эксперимента – исследовать возможности освоения обучающимися эвристического приема «Анализ постановки задачи» (АПЗ) (таблица 1, часть 1) под руководством преподавателя в процессе регулярного и осмысленного использования схемы ОМД в ходе решения задач во время аудиторных учебных занятий. Предполагается, что систематическое использование схемы ОМД в аудиторной учебной работе под управлением преподавателя статистически значимо влияет на освоение студентами эвристического приема АПЗ.

2.3. Выборка и процедуры

Участниками эксперимента стали студенты 1-го курса направления подготовки 44.03.05 Педагогическое образование с двумя профилями подготовки: «Математика. Иностранный язык» (МИЯ, 16 чел.) и «Математика. Экономика» (МЭ, 19 чел.), которые не были информированы о проведении преподавателем экспериментальной работы.

2.4. Организация экспериментальных условий

В учебном процессе группы МИЯ (экспериментальная группа) решение задач было организовано с применением схемы ОМД. Она была предъявлена в самом начале изучения темы и по ходу работы неоднократно актуализировалась. На каждом занятии под руководством преподавателя обучающиеся коллективно проводили анализ условия задачи (таблица 1, часть 1).

Таблица 1. *Инструкционная схема организации мыслительной деятельности при решении математических задач (схема ОМД)*
Table 1. *Instructional scheme for organizing mental activity when solving mathematical problems (OMA Framework)*

Обучающийся умеет	**1. Анализ математической постановки задачи**		
	1	называть	объект исследования
	2	формулировать	предмет исследования
	3	намечать	ответ на задачу (возможные варианты результата исследования объекта)
	4	выделять	компоненты объекта исследования
	5	характеризовать	компоненты объекта исследования в соответствии с требованиями предмета исследования
	2. Решение задачи		
	1	формулировать	ключевую идею решения задачи (прием исследования объекта)
	2	отбирать	«инструменты» решения задачи (методы исследования объекта)
	3	комментировать	применение «инструментов» на каждом шаге решения задачи (процесс исследования объекта)
	4	формулировать	ответ на задачу (результат исследования объекта)
	5	выделять	этапы решения задачи (структуру исследования объекта)
	3. Анализ решения задачи		
	1	проверять	правильность каждого шага решения задачи (правильность хода исследования объекта)
	2	оценивать	полноту решения задачи (полноту исследования объекта)
	3	оценивать*	рациональность решения задачи (рациональность процесса исследования объекта)
	4	формулировать**	выводы по решению задачи (комплексные итоги исследования объекта)
	5	анализировать***	возможность переноса результатов решения задачи (уникальность объекта исследования)

*Примечание. * Оценка рациональности решения предполагает сопоставление альтернативных вариантов решения или отдельных его элементов.*

*** Формулировка выводов по решению предполагает выделение обобщенных приемов решения. Выполняется при первой встрече с некоторым типом задач. В дальнейшем выделенный прием становится «готовым» инструментом анализа условия задач.*

**** Анализ возможности переноса результатов решения предполагает исследование «устойчивости решения» при варьировании характеристик объекта задачи и по существу является дополнительной исследовательской задачей. Выполняется при первой встрече с некоторым типом задач.*

*Note. * Assessing the rationality of a solution involves comparing alternative solution options or its individual elements.*

*** Formulating conclusions on the solution involves identifying generalized solution techniques. This is performed when first encountering a certain problem type. Subsequently, the identified technique becomes a "ready-made" tool for analyzing the conditions of the problem.*

**** Analyzing the possibility of transferring solution results involves studying the "solution stability" when varying the characteristics of the problem object and is essentially an additional research task. This is performed when first encountering a certain problem type.*

Использование схемы в полном объеме было выполнено не для всех рассмотренных заданий. В группе МЭ (контрольная группа) процесс обучения решению задач проходил в традиционном формате (без использования схемы) – как комментированное решение задач.

2.5. Временные параметры и содержательный контекст

Эксперимент был организован в естественных условиях аудиторной учебной работы объемом 46 академических часов при изучении интегрального исчисления функций одной действительной переменной в курсе математического анализа. Работа включала 18 ч освоения теоретического материала, 20 ч практики решения задач и 8 ч контроля в форме индивидуальной самостоятельной работы обучающихся.

2.6. Обоснование выбора тематического материала

Тематический материал позволил наглядно продемонстрировать возможности использования схемы ОМД как в целом, так и конкретно в первой части, посвященной анализу условия. Каждый тип интегралов, рассматриваемых в курсе интегрального исчисления функций одной действительной переменной, требует от решателя выделения в его структуре нового компонента и/или его характеристики. Так, при переходе от неопределенных интегралов к определенным и несобственным интегралам добавляется компонент «область интегрирования». При переходе от определенных интегралов к несобственным интегралам изменяются свойства компонентов «область интегрирования» или «подынтегральная функция» – ограниченность сменяется неограниченностью.

2.7. Система оценивания и сбора данных

Функцию контрольных этапов эксперимента выполнили контрольные работы, предусмотренные календарным планом. В качестве количественной информации, отражающей уровень сформированности аналитической эвристики АПЗ, использовались доли максимально возможного результата, выраженного в баллах. Оценивалось пошаговое выполнение специального задания по анализу условия (таблица 1, часть 1) и включенных в контрольные работы задач.

2.8. Ограничения исследования

Проведение эксперимента в реальном учебном процессе наложило свои ограничения. При подведении итогов учитывались результаты лишь тех обучающихся, которые не пропустили ни одного аудиторного занятия. Таким образом, выводы исследования построены на результатах малочисленных выборок: 5 чел. в экспериментальной группе (МИЯ, 16 чел.) и 7 чел. в контрольной группе (МЭ, 19 чел.). Это значительно ограничило возможности использования количественного анализа при обработке результатов.

2.9. Статистические методы анализа

Подготовительная часть эксперимента

Проверка однородности выборок экспериментальной и контрольной групп проводилась по результатам независимой оценки уровня подготовки (сумма баллов ЕГЭ при поступлении в вуз) с помощью U-критерия Манна – Уитни (англ. Mann–Whitney U-test). Гипотеза об отсутствии статистически достоверных различий в уровне подготовки испытуемых экспериментальной и контрольной групп подтвердилась на уровне значимости p=0,05.

Основная часть эксперимента

С помощью U-критерия Манна – Уитни проверялась гипотеза о том, что в экспериментальной и контрольной группах значения показателя АПЗ различны и в экспериментальной группе этот показатель выше.

Заключительная часть эксперимента

На основе результатов работы групп на трех контрольных этапах были изучены изменения (сдвиг) в показателе АПЗ. Проверяемая гипотеза – изменение показателя не является случайным. Для ее проверки применялся Т-критерий Вилкоксона (англ. Wilcoxon rank-sum test). В обеих группах гипотеза не нашла статистически значимого подтверждения.

2.10. Качественные методы анализа

Изучение динамики показателя АПЗ в связи с малочисленностью групп было проведено в форме качественного анализа графически представленных результатов эксперимента. На основе лепестковых диаграмм проведен сравнительный анализ индивидуальных результатов по отношению к среднему, полученному после объединения групп.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

3.1. Проверка гипотезы о различиях в показателе АПЗ

По результатам первого контрольного этапа эксперимента (контрольная работа № 2 по теме «Интегрирование различных классов функций») на 5%-м уровне значимости нашла подтверждение основная гипотеза об отсутствии значимых различий в показателе АПЗ экспериментальной и контрольной групп. На втором контрольном этапе эксперимента (контрольная работа № 3 по теме «Определенные интегралы») различия значений показателя АПЗ в экспериментальной и контрольной группах были подтверждены на 1%-м уровне значимости. Третий контрольный этап эксперимента (контрольная работа № 4 по теме «Несобственные интегралы») обнаружил статистически достоверные различия в значениях показателя АПЗ в экспериментальной и контрольной группах на уровне значимости 5 %.

3.2. Сравнение общего среднего и индивидуальных результатов

На первом контрольном этапе эксперимента среднее значение показателя АПЗ составило 0,57. Индивидуальные результаты всех участников экспериментальной группы за исключением одного (№ 4) превосходили среднее значение. Двое испытуемых (№ 1 и 5) имели максимально возможный результат – 1. Результат участника № 4, не преодолевшего средний порог, очень низкий и составил 0,15 (рис. 1).

Значение показателя выше среднего получили трое испытуемых контрольной группы (№ 7, 8, 10). Они незначительно отличались от среднего и составляли 0,6. Минимальный результат участника контрольной группы (№ 11), не преодолевшего порог среднего значения, равнялся нулю (рис. 1).

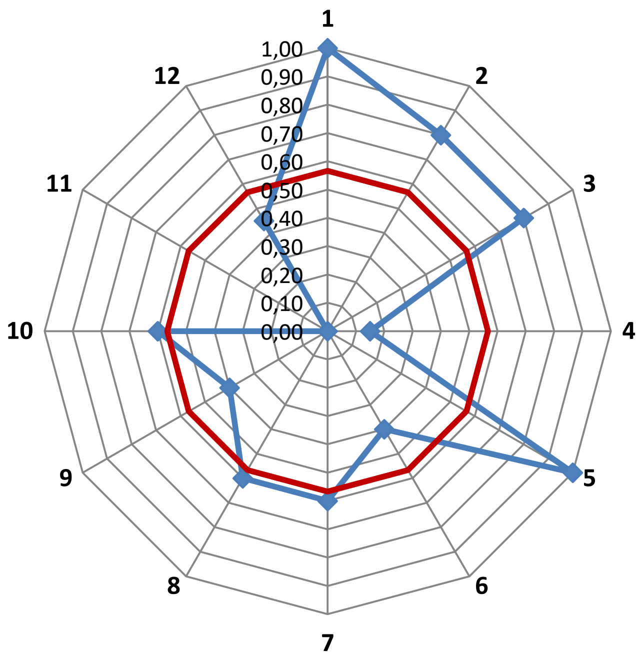

Рис. 1. *Диаграмма индивидуальных результатов и среднего значения показателя «Анализ постановки задачи» на 1-м контрольном этапе эксперимента.*
Цифрами 1–5 обозначены участники экспериментальной группы, 6–12 – участники контрольной группы
Fig. 1. *Diagram of individual results and the average value of the Problem Setting Analysis indicator at the 1st stage of the experiment.*
Numbers 1–5 indicate participants in the experimental group, and 6–12 indicate participants in the control group

На втором контрольном этапе эксперимента среднее значение показателя АПЗ составило 0,5. Индивидуальные результаты всех участников экспериментальной группы превосходили 0,6. Никто из испытуемых не достиг максимально возможного результата. Лучший результат составил 0,89. Его получил испытуемый № 5, который на первом контрольном этапе имел абсолютный максимум – 1 (рис. 2).

Значение показателя выше среднего получили двое испытуемых контрольной группы (№ 7 и 10). Они незначительно отличались от среднего и составили 0,56 и 0,61 соответственно. Оба результата принадлежат испытуемым, которые и на первом контрольном этапе эксперимента преодолели порог среднего значения. Минимальный результат участника контрольной группы, не перешагнувшего среднее значение (№ 12), составил 0,17. Этот результат не принадлежит испытуемому № 11, который на предыдущем контрольном этапе имел минимальное значение исследуемого показателя (рис. 2).

На третьем контрольном этапе эксперимента среднее значение показателя АПЗ составило 0,57, уже наблюдавшееся на первом контрольном этапе. Индивидуальные результаты всех участников экспериментальной группы за исключением одного (№ 4) превосходили среднее значение. Двое испытуемых (№ 1 и 2) имели максимально возможный результат – 1. Для участника № 1 это результат и первого, и третьего контрольных этапов эксперимента. Участник № 2 этого результата достиг впервые. Участник № 5, который демонстрировал самые высокие результаты на первом и втором контрольных этапах эксперимента, на данном этапе имел результаты значительно ниже – 0,81. Минимальный результат участника № 4, не преодолевшего порог среднего значения, составил 0,43. Этот же участник не преодолел порог среднего значения и на первом контрольном этапе (рис. 3).

Значение показателя выше среднего получил один испытуемый (№ 10) контрольной группы. Он незначительно отличался от среднего и составил 0,62. Этот испытуемый на протяжении всех трех контрольных этапов эксперимента демонстрировал стабильно высокие результаты, превосходящие среднее значение. Минимальный результат 0,14 продемонстрировали участники № 11 и 12. Именно их результаты были минимальными на первом и втором контрольных этапах (рис. 3).

В завершение приведем диаграмму средних индивидуальных результатов и общего среднего для всех трех контрольных этапов эксперимента. В экспериментальной группе один испытуемый (№ 4) не преодолел порог среднего значения, а в контрольной группе лишь один испытуемый (№ 10) этот порог перешагнул (рис. 4).

3.3. Анализ динамики индивидуальных результатов

Проведен анализ динамики показателя АПЗ на основе результатов трех контрольных этапов эксперимента (рис. 5). Можно выделить четыре вида динамики индивидуальных результатов (таблица 2).

Вариант «вверх – вверх» означает, что индивидуальный результат на каждом следующем контрольном этапе эксперимента становился лучше, чем на предыдущем. Он отмечен только в контрольной группе и характеризует 8 % участников объединенной группы испытуемых. Индивидуальный профиль «вниз – вверх» означает, что спад

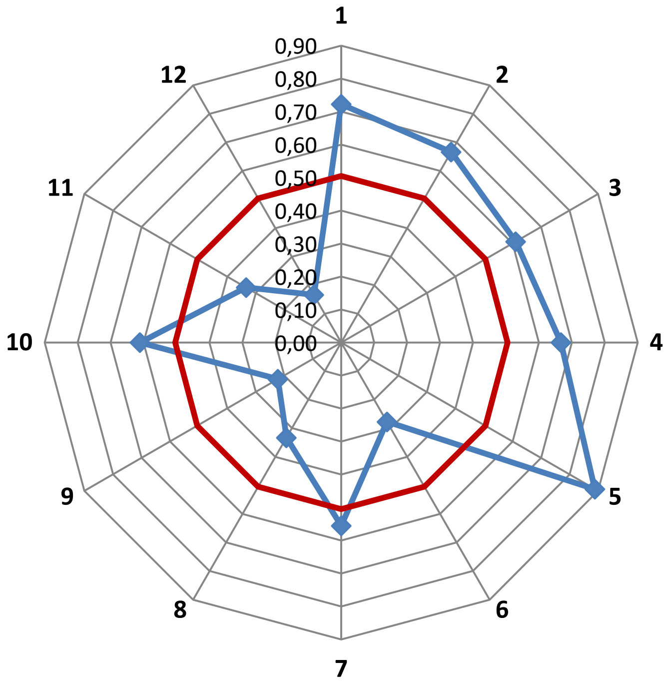

Рис. 2. *Диаграмма индивидуальных результатов и среднего значения показателя «Анализ постановки задачи» на 2-м контрольном этапе эксперимента.*
Цифрами 1–5 обозначены участники экспериментальной группы, 6–12 – участники контрольной группы
Fig. 2. *Diagram of individual results and the average value of the Problem Setting Analysis indicator at the 2nd control stage of the experiment.*
Numbers 1–5 indicate participants in the experimental group, and 6–12 indicate participants in the control group

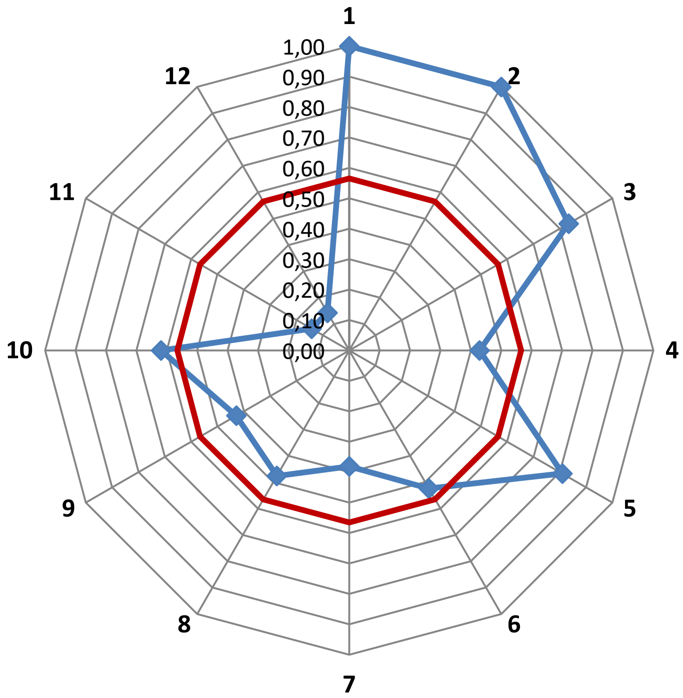

Рис. 3. *Диаграмма индивидуальных результатов и среднего значения показателя «Анализ постановки задачи» на 3-м контрольном этапе эксперимента.*
Цифрами 1–5 обозначены участники экспериментальной группы, 6–12 – участники контрольной группы
Fig. 3. *Diagram of individual results and the average value of the Problem Setting Analysis indicator at the 3rd control stage of the experiment.*
Numbers 1–5 indicate participants in the experimental group, and 6–12 indicate participants in the control group

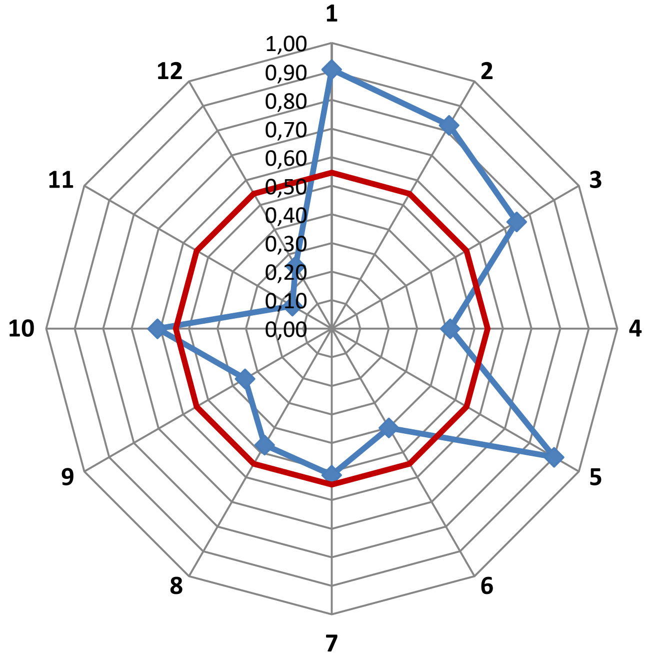

Рис. 4. *Диаграмма средних индивидуальных результатов и общего среднего значения показателя «Анализ постановки задачи» на трех контрольных этапах эксперимента. Цифрами 1–5 обозначены участники экспериментальной группы, 6–12 – участники контрольной группы*
Fig. 4. *Diagram of average individual results and the overall average value of the Problem Setting Analysis indicator at three control stages of the experiment Numbers 1–5 indicate participants in the experimental group, and 6–12 indicate participants in the control group*

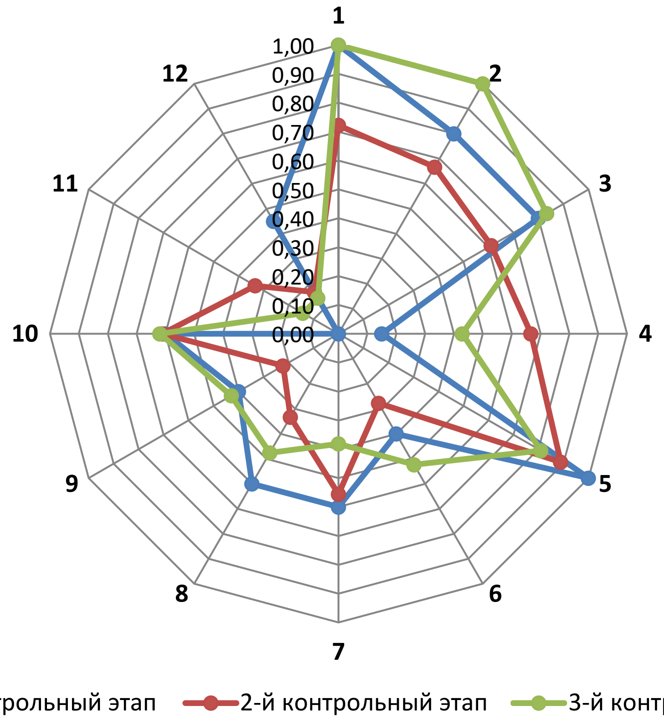

Рис. 5. *Диаграмма динамики индивидуальных результатов показателя «Анализ постановки задачи» на 1-м, 2-м и 3-м контрольных этапах эксперимента. Цифрами 1–5 обозначены участники экспериментальной группы, 6–12 – участники контрольной группы*
Fig. 5. *Dynamics of individual results for the Problem Setting Analysis indicator at the 1st, 2nd, and 3rd control stages of the experiment. Numbers 1–5 indicate participants in the experimental group, and 6–12 indicate participants in the control group*

Таблица 2. *Динамика индивидуальных результатов участников эксперимента*
Table 2. *Dynamics of individual results of the experiment participants*

Вид динамики	**Группа**					
	Экспериментальная		**Контрольная**		**Объединенная**	
	чел.	**%**	**чел.**	**%**	**чел.**	**%**
Вверх – вверх	0	0	1	14	1	8
Вниз – вверх	3	60	3	43	6	50
Вверх – вниз	1	20	1	14	2	17
Вниз – вниз	1	20	2	29	3	25
Контрольные суммы	5	100	7	100	12	100

индивидуального результата на 2-м контрольном этапе эксперимента по сравнению с 1-м сменился подъемом при переходе от 2-го контрольного этапа к 3-му. Этот вариант профиля является преобладающим для экспериментальной и контрольной групп и характеризует 50 % участников эксперимента. Динамика «вверх – вниз» означает, что подъем индивидуального результата при переходе от 1-го контрольного этапа эксперимента ко 2-му сменился спадом при переходе от 2-го этапа к 3-му. Она наблюдалась в каждой группе и характеризует 17 % участников объединенной группы испытуемых. Самый негативный тренд «вниз – вниз» означает, что каждый следующий результат испытуемого становился хуже предыдущего. Он отмечен в обеих группах и характеризует 25 % участников эксперимента.

3.4. Анализ крайних индивидуальных результатов

Проведено изучение динамики индивидуальных крайних (лучших и худших) значений показателя АПЗ участников экспериментальной и контрольной групп (рис. 5).

В экспериментальной группе крайние лучшие результаты не имеют однозначной динамики. Так, участники № 1 и 2 демонстрируют колебания динамики «вниз – вверх», при этом № 2 в итоге достигает абсолютного максимума, а № 1 к нему возвращается; участник № 5 показывает отрицательную динамику: «вниз – вниз». Скорость передвижения у всех участников тоже разная: № 1 движется приблизительно одинаково – почти на 3 интервала в обоих направлениях, № 2 – на 1 интервал в направлении спада и на 3 интервала в направлении подъема, № 5 – на 1 интервал в направлении спада на каждом контрольном этапе. Под интервалом понимается один из интервалов длиной 0,1, на которые разбит диапазон возможных значений показателя АПЗ: 0–0,1; 0,1–0,2; …; 0,9–1. Участник № 4 с крайним худшим результатом тоже демонстрирует колебания динамики: вверх (на 5 интервалов) – вниз (на 2 интервала).

В контрольной группе крайний лучший результат участника № 10 стабилен (не выходит за пределы одного интервала на протяжении всех трех контрольных этапов эксперимента). Крайние худшие результаты не имеют однозначной динамики. Так, участник № 11 демонстрирует колебания динамики: вверх из абсолютного нуля (на 3 интервала) – вниз (на 2 интервала); участник № 12 – вниз (на 3 интервала) – вниз (оставаясь в том же интервале).

4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Приведем вариант использования схемы ОМД на примере работы с задачей по теме «Неопределенный интеграл».

Задача 1. Найдите интеграл $\int x \cdot \cos\left(1 - x^2\right) dx$. Для соотнесения хода решения с элементами схемы информация представлена в виде таблиц 3, 4.

Предложенная структура является мягкой инструкцией, а не жестким алгоритмом, т. е. в ходе решения задачи возможно нелинейное движение по схеме, возвращение к уже пройденным пунктам с целью уточнения их содержания. Следование схеме направлено на получение полного, развернутого и осмысленного решения. В ситуации, когда происходит знакомство с новым типом задач, особое значение приобретает третья часть схемы, так как в результате ее прохождения у обучающегося формируется новый инструмент решения, в котором математический объект (класс объектов) соединен с эффективным методом его исследования.

Схема разрабатывалась как инструмент в работе с рутинными задачами, но автор видит ее перспективность и в освоении эвристических приемов при решении творческих задач, считая таковыми, например, задачи олимпиадной математики. Обращение к схеме призвано помочь обучающемуся запустить процесс решения задачи, преодолеть часто встречающуюся проблему – «не знаю, с чего начать».

В процессе использования схемы ОМД одновременно и целенаправленно рассматривается несколько задач: индивидуальная математическая задача, которая представлена в формулировке условия; задача поиска решения этой задачи; включение данной задачи в более общий класс задач; самостоятельная постановка новых вопросов в описанной задачной ситуации. Эти аспекты имеют принципиальное значение для формирования предметных и профессиональных компетенций будущих учителей математики.

Таблица 3. *Решение задачи 1 согласно схеме организации мыслительной деятельности*
Table 3. *Solution of problem No. 1 according to the Organizing Mental Activity Framework*

	№ п/п	Описание мыслительной деятельности обучающегося в общем виде		Результат выполнения мыслительной деятельности
Обучающийся умеет	**1. Анализ математической постановки задачи**			
	1	называть	объект исследования	неопределенный интеграл
	2	формулировать	предмет исследования	нахождение значения интеграла
	3	намечать	ответ на задачу (возможные варианты результата исследования объекта)	выражение вида $F(x)+C$; множество всех первообразных подынтегральной функции
	4	выделять	компоненты объекта исследования	переменная интегрирования
				подынтегральная функция
	5	характеризовать	компоненты объекта исследования в соответствии с требованиями предмета исследования	$x \in D(f)=R$, не совпадает с аргументом $\varphi = 1 - x^2$ функции $g(\varphi) = \cos\varphi$
				$f(x) = x \cdot \cos\left(1 - x^2\right)$ – произведение двух множителей, где один множитель является производной аргумента другого множителя (с точностью до мультипликативной константы): $\left(1 - x^2\right)' = -2x$
	2. Решение задачи			
	1	формулировать	ключевую идею решения задачи (прием исследования объекта)	представление подынтегрального выражения в виде $g(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)dx = g(\varphi)d\varphi$
	2	отбирать	«инструменты» решения задачи (методы исследования объекта)	внесение переменной под знак дифференциала
	3	комментировать	применение «инструментов» на каждом шаге решения задачи (процесс исследования объекта)	см. таблицу 4
	4	формулировать	ответ на задачу (результат исследования объекта)	$-\frac{1}{2}\sin\left(1 - x^2\right) + C$
	5	выделять	этапы решения задачи (структуру исследования объекта)	1) преобразование подынтегрального выражения; 2) непосредственное интегрирование; 3) формулировка и запись ответа
	3. Анализ решения задачи			
	1	проверять	правильность каждого шага решения задачи (правильность хода исследования объекта)	при проверке ошибок не обнаружено
	2	оценивать	полноту решения задачи (полноту исследования объекта)	решение является избыточно подробным: с приобретением опыта можно объединять* пункты 2–4 и 5–7 в один пункт (таблица 4)

Продолжение таблицы 3
Table 3 continued

	№ п/п	Описание мыслительной деятельности обучающегося в общем виде		Результат выполнения мыслительной деятельности
	3. Анализ решения задачи			
Обучающийся умеет	3	оценивать	рациональность решения задачи (рациональность процесса исследования объекта)	решение является рациональным; альтернатива – решение методом замены переменной
	4	формулировать	выводы по решению задачи (комплексные итоги исследования объекта)	прием «внесение переменной под знак дифференциала» является обобщением свойства неопределенного интеграла $\int f(x)dx = F(x)+C \Rightarrow$ $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C$ при $\varphi(x) \neq ax+b$
	5	анализировать	возможность переноса результатов решения задачи (уникальность объекта исследования)	прием можно применять в случае, когда подынтегральное выражение представимо в виде $k \cdot g(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)dx$, т. е. подынтегральная функция – это произведение, где один множитель является сложной функцией $g(\varphi(x))$, а другой множитель $k \cdot \varphi'(x)$ с точностью до мультипликативной константы является производной аргумента первого множителя

*Примечание. * Речь идет о поэтапном переходе мыслительных действий во внутренний план. Под управлением учителя находятся этапы: 1) мотивация; 2) формирование ориентировочной основы будущего действия; 3) материализованные действия; 4) внешнеречевые действия.*

*Note. * This is a stage-by-stage transition of mental actions to the internal plane. The teacher controls the following stages: 1) motivation; 2) formation of an orienting basis for future action; 3) materialized actions; 4) external speech actions.*

***Таблица 4.** Комментирование пошагового решения задачи 1*
***Table 4.** Commenting on the step-by-step solution to problem No. 1*

№ п/п	Действие	Комментирование
1	$\int x \cdot \cos\left(1-x^2\right)dx =$	Перепишем условие задачи
2	$-\frac{1}{2} \cdot \int (-2x) \cdot \cos\left(1-x^2\right)dx =$	Умножим и разделим подынтегральное выражение на (-2) и вынесем постоянный множитель $\left(-\frac{1}{2}\right)$ за знак интеграла
3	$-\frac{1}{2} \cdot \int \cos\left(1-x^2\right) \cdot \left(1-x^2\right)' dx =$	Представим подынтегральную функцию в виде произведения двух множителей, один из которых равен производной аргумента другого множителя
4	$-\frac{1}{2} \cdot \int \cos\left(1-x^2\right) \cdot d\left(1-x^2\right) =$	Внесем переменную величину $1-x^2$ под знак дифференциала

Продолжение таблицы 4
Table 4 continued

№ п/п	Действие	Комментирование
5	$-\frac{1}{2}\cdot\int\cos\varphi\cdot d\varphi\Big\vert_{\varphi=\varphi(x)=1-x^2} =$	Представим подынтегральное выражение в виде $g(\varphi)\cdot d\varphi$, где $\varphi=\varphi(x)=1-x^2$
6	$-\frac{1}{2}\cdot\sin\varphi\Big\vert_{\varphi=\varphi(x)=1-x^2} + C =$	Найдем интеграл по формуле из таблицы основных интегралов (аргумент подынтегральной функции совпадает с переменной интегрирования)
7	$-\frac{1}{2}\cdot\sin\left(1-x^2\right)+C$	Вернемся к исходной переменной интегрирования x по формуле $\varphi=1-x^2$

С опорой на труды П.Я. Гальперина и его учеников можно перечислить отличительные характеристики результата обучения, отвечающие за формирование у учеников ориентировки третьего типа. К ним относятся: а) высокая разумность действия; б) высокая устойчивость действия; в) широкий перенос, в том числе за границы намеченной предметной области; г) «внутренняя», познавательная мотивация; д) оптимизация процесса обучения; е) верное «чувство предмета», определяющее специфику подходов к решению именно его задач присущими ему средствами [12]. Использование схемы ОМД, как предельно обобщенного и универсального инструмента организации обучения, призвано создать условия для возникновения перечисленных феноменов третьего типа ориентировки в учебной деятельности по решению математических задач [1; 13].

Организация математической деятельности по решению задач согласно схеме ОМД включает:

– ориентировку решателя в условиях осуществления деятельности (1. Анализ математической постановки задачи);

– актуализацию, выбор и применение инструментов деятельности (2. Решение задачи);

– осмысление осуществляемой деятельности и ее перспектив (3. Анализ решения задачи).

Другими словами, она позволяет реализовать модель обучения с третьим типом ориентировки, при этом по ходу работы посредством анализа существенных свойств и отношений объектов обучающиеся осваивают обобщенную ориентировочную основу не только единичного действия, но и деятельности целиком. Если следовать периодизации представлений об ориентировке в рамках теории поэтапного формирования действий и говорить о характерном для современного этапа различении уровней ориентировки – стратегическом, тактическом, операционально-техническом, то схему ОМД можно позиционировать как рабочий инструмент организации ориентировки стратегического уровня [8].

Представление проблемной ситуации как задачи с включением взаимосвязанных параметров является культурно-приобретаемым психологическим средством мышления. Развитие процессов решения мыслительных задач в онтогенезе связано с присвоением культурно-исторического опыта продуктивного мышления как набора разноплановых эвристик [14]. Систематическое использование схемы ОМД в процессе решения задач можно трактовать как технологию обучения, в которой освоение аналитических эвристик становится управляемым процессом.

В практике российской общеобразовательной школы элементы технологии критериально-ориентированного обучения получили достаточное распространение. Например, для оценивания достижений учащихся по математике традиционно выделяются критерии «знание и понимание», «исследование», «коммуникация» и «рефлексия» [15]. Авторское описание критериев не полностью совпадет с традиционным и приведено в таблице 5 [13]. В силу многозначности критерия «исследование» будем различать исследовательский тип самого задания и исследование как прием решения задач, которые в общепринятом смысле исследовательскими не являются и имеют целью освоение математических конструкций. Инструкционная схема ОМД может выполнять функцию инструмента оценивания и самооценивания результатов обучения, так как позволяет анализировать уровень сформированности конкретных мыслительных действий.

Соотнесем шаги учебной работы, предложенные в схеме ОМД (таблица 1), одновременно с одним из критериев оценивания достижений обучающихся: *A*, *B*, *C*, *D* (таблица 5) и одной из форм преобразования информации в знание: Р – разнесение, О – организация, К – классификация, П – проверка информации [13]. Это позволяет сопоставлять шаги решения по трудоемкости и переходить к количественному анализу деятельности обучающихся. При этом элементы инструкционной схемы можно трактовать как дескрипторы, описывающие максимальный уровень критериальной шкалы оценивания достижений обучающихся (таблица 6).

Проведенный качественный анализ результатов эксперимента позволяет фиксировать наличие индивидуальных различий показателя АПЗ. Это свидетельствует о влиянии индивидуальных особенностей испытуемых на результаты работы. Возможные причины этих различий (мотивация учебной деятельности, особенности саморегуляции, индивидуальный когнитивный стиль и т. д.) могут составлять предмет самостоятельных исследований.

Таблица 5. Общие критерии оценивания достижений обучающихся в предметном блоке «Математика»
Table 5. General criteria for assessing students' achievements in the "Mathematics" subject block

Обозначение критерия	Название критерия	Описание критерия
A	Знание и понимание	Учащийся умеет пользоваться языком математики, законами, закономерностями, терминами и понятиями; применять информацию для решения проблем в знакомых и нестандартных ситуациях
B	Исследование	Учащийся умеет выбирать и использовать подходящие математические знания, умения, навыки для решения проблем с использованием приема математического моделирования
C	Коммуникация	Учащийся умеет лаконично и математически грамотно передавать в виде устных и письменных сообщений информацию по планированию, проведению и описанию результатов исследований
D	Рефлексия	Учащийся умеет анализировать и обобщать проблему исследования; обосновывать полученные результаты и проверять их правильность; указывать на межпредметные связи при их наличии

Таблица 6. Соотнесение шагов решения в схеме организации мыслительной деятельности с общими критериями оценивания достижений обучающихся и формами преобразования информации
Table 6. Correlating the solution steps in the Organizing Mental Activity framework with the general criteria for assessing students' achievements and forms of information transformation

Результат обучения в терминах деятельности				Критерий оценивания (таблица 5)	Преобразование информации
Обучающийся умеет	**1. Анализ математической постановки задачи**			ABD	POK
	1	называть	объект исследования	B	K
	2	формулировать	предмет исследования	B	K
	3	намечать	ответ на задачу (возможные варианты результата исследования объекта)	D	O
	4	выделять	компоненты объекта исследования	A	P
	5	характеризовать	компоненты объекта исследования в соответствии с требованиями предмета исследования	A	P
	2. Решение задачи			ABCD	PO
	1	формулировать	ключевую идею решения задачи (прием исследования объекта)	B	O
	2	отбирать	«инструменты» решения задачи (методы исследования объекта)	A	O
	3	комментировать	применение «инструментов» на каждом шаге решения задачи (процесс исследования объекта)	AC	OP
	4	формулировать	ответ на задачу (результат исследования объекта)	C	O
	5	выделять	этапы решения задачи (структуру исследования объекта)	D	O

Продолжение таблицы 6
Table 6 continued

Результат обучения в терминах деятельности				Критерий оценивания (таблица 5)	Преобразование информации
Обучающийся умеет	3. Анализ решения задачи			ABCD	РОКП
	1	Проверять	правильность каждого шага решения задачи (правильность хода исследования объекта)	D	П
	2	Оценивать	полноту решения задачи (полноту исследования объекта)	D	П
	3	Оценивать	рациональность решения задачи (рациональность процесса исследования объекта)	D	П
	4	Формулировать	выводы по решению задачи (комплексные итоги исследования объекта)	ABCD	РОК
	5	Анализировать	возможность переноса результатов решения задачи (уникальность объекта исследования)	ABCD	РОК

Примечание. Буквами обозначены ведущие для данного этапа работы с задачей формы преобразования информации в знание: Р – разнесение; О – организация; К – классификация; П – проверка информации.

Note. The letters indicate the leading forms of information transformation into knowledge for a given stage of work with the task: Р is distribution, О is organization, К is classification, П is information verification.

5. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

На 5%-м уровне значимости подтвердилась гипотеза о том, что специальные приемы организации влияют на формирование у обучающихся ориентировки в учебной деятельности по решению математических задач.

Показана возможность использования разработанного инструмента организации обучения решению математических задач с применением концепции поэтапного формирования умственных действий на основе третьего типа ориентировки для организации критериального оценивания достижений обучающихся.

Разработанный инструмент организации обучения можно рекомендовать к использованию в учебном процессе подготовки будущих учителей математики при освоении содержания темы «Интегральное исчисление функций одной действительной переменной» дисциплины «Математический анализ».

В результате проведенного исследования подтвердилась основная идея автора работы – разработанная структура организации процесса мышления является эффективным инструментом обучения решению математических задач. Схема ОМД может быть использована как технологический инструмент организации процесса обучения решению задач при подготовке учителей математики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Макеева О.В., Фолиадова Е.В. Инструкционная схема организации мыслительной деятельности будущих учителей математики в процессе освоения базовых понятий функционального анализа // Поволжский педагогический поиск. 2020. № 4. С. 108–115. DOI: 10.33065/2307-1052-2020-4-34-108-115.
2. Леонтьев А.Н. Деятельность. Сознание. Личность. М.: Смысл, 2004. 352 с. EDN: QXIXLX.
3. Медведев А.М., Жуланова И.В. Деятельностный подход как ориентир современного образования: исходное содержание и риски редукции // Мир науки. Педагогика и психология. 2021. Т. 9. № 2. С. 29–48. EDN: CZVJFB.
4. Эльконин Б.Д. Современность теории и практики учебной деятельности: ключевые вопросы и перспективы // Психологическая наука и образование. 2020. Т. 25. № 4. С. 28–39. DOI: 10.17759/pse.2020250403.
5. Степанова М.А. Вариации на тему развивающего образования // Культурно-историческая психология. 2023. Т. 19. № 4. С. 78–89. DOI: 10.17759/chp.2023190408.
6. Степанова М.А. К вопросу о преподавании математики в начальной школе: опыт экспериментального обучения // Вестник Московского университета. Серия 20: Педагогическое образование. 2024. Т. 22. № 1. С. 161–189. EDN: GKAQQB.
7. Гальперин П.Я. О формировании умственных действий и понятий // Культурно-историческая психология. 2010. № 3. С. 111–114. EDN: MUNIHJ.
8. Лидерс А.Г., Фролов Ю.И. Развитие представлений об ориентировке и ориентировочной деятельности в концепции П.Я. Гальперина // Культурно-историческая психология. 2012. № 4. С. 13–27. EDN: PZSTJX.
9. Подольский А.И. Научное наследие П.Я. Гальперина и вызовы XXI века // Национальный психологический журнал. 2017. № 3. С. 9–20. DOI: 10.11621/npj.2017.0303.
10. Taxonomy of educational objectives: The classification of educational goals: Handbook I, cognitive domain / ed. B.S. Bloom. New York: David McKey Co, 1956. 230 p.
11. Шаповалова О.Н., Ефремова Н.Ф. Дидактический потенциал формирующего оценивания метапред-

метных результатов школьников: российский и зарубежный опыт // Мир науки. Педагогика и психология. 2019. Т. 7. № 6. С. 78–89. EDN: YAKEBM.
12. Высоцкая Е.В., Рехтман И.В. Два подхода к построению учебного предмета по третьему типу ориентировки и выбор «основных единиц» (на материале химии) // Культурно-историческая психология. 2012. № 4. С. 42–54. EDN: PZSTLB.
13. Макеева О.В., Фолиадова Е.В. Формирующее оценивание мыследеятельности будущих учителей математики в процессе решения задач по математической дисциплине // Электронные библиотеки. 2019. Т. 22. № 6. С. 644–654. DOI: 10.26907/1562-5419-2019-22-6-644-654.
14. Спиридонов В.Ф. Психология мышления. Решение задач и проблем. М.: Юрайт, 2022. 323 с.
15. Безукладников К.Э., Красноборова А.А., Крузе Б.А. Критериальное оценивание результатов образования. Пермь: ПГГПУ, 2012. 126 с.

REFERENCES

1. Makeeva O.V., Foliadova E.V. Instructional scheme of organizing mental activity of future maths teachers while mastering basic concepts of functional analysis. *Volga Region pedagogical search*, 2020, no. 4, pp. 108–115. DOI: 10.33065/2307-1052-2020-4-34-108-115.
2. Leontev A.N. *Deyatelnost. Soznanie. Lichnost* [Activity. Conscience. Personality]. Moscow, Smysl Publ., 2004. 352 p. EDN: QXIXLX.
3. Medvedev A.M., Zhulanova I.V. Activity approach as a guideline of modern education: initial content and risks of reduction. *World of Science. Pedagogy and Psychology*, 2021, vol. 9, no. 2, pp. 29–48. EDN: CZVJFB.
4. Elkonin B.D. Modern era of the theory and practice of learning activity: key issues and perspectives. *Psychological Science and Education*, 2020, vol. 25, no. 4, pp. 28–39. DOI: 10.17759/pse.2020250403.
5. Stepanova M.A. Variations on the subject of developmental education. *Cultural-Historical Psychology*, 2023, vol. 19, no. 4, pp. 78–89. DOI: 10.17759/chp.2023190408.
6. Stepanova M.A. On the issue of teaching mathematics in elementary school: experiential learning experience. *Lomonosov Pedagogical Educational Journal*, 2024, vol. 22, no. 1, pp. 161–189. EDN: GKAQQB.
7. Galperin P.Ya. On Development of Mental Actions and Concepts. *Cultural-Historical Psychology*, 2010, no. 3, pp. 111–114. EDN: MUNIHJ.
8. Liders A.G., Frolov Yu.I. Evolution of concepts of orientation and orienting activity in Galperin's theory. *Cultural-Historical Psychology*, 2012, no. 4, pp. 13–27. EDN: PZSTJX.
9. Podolskiy A.I. Scientific legacy of P.Ya. Galperin and the challenges of the 21st century. *National Psychological journal*, 2017, no. 3, pp. 9–20. DOI: 10.11621/npj.2017.0303.
10. Bloom B.S., ed. *Taxonomy of educational objectives: The classification of educational goals: Handbook I, cognitive domain*. New York, David McKey Co Publ., 1956. 230 p.
11. Shapovalova O.N., Efremova N.F. The didactic potential of formative assessment of meta-disciplinary results of schoolchildren: Russian and foreign experience. *World of Science. Pedagogy and Psychology*, 2019, vol. 7, no. 6, pp. 78–89. EDN: YAKEBM.
12. Vysotskaya E.V., Rekhtman I.V. Two approaches to curriculum design following the third type of orientation: choosing 'main units' (with chemistry curriculum as an example). *Cultural-Historical Psychology*, 2012, no. 4, pp. 42–54. EDN: PZSTLB.
13. Makeeva O.V., Foliadova E.V. Formative assessment of future teachers' cognitive activity in the process of solving problems within math courses. *Russian Digital Libraries Journal*, 2019, vol. 22, no. 6, pp. 644–654. DOI: 10.26907/1562-5419-2019-22-6-644-654.
14. Spiridonov V.F. *Psikhologiya myshleniya. Reshenie zadach i problem* [Psychology of thinking. Problem and task solving]. Moscow, Yurayt Publ., 2022. 323 p.
15. Bezukladnikov K.E., Krasnoborova A.A., Kruze B.A. *Kriterialnoe otsenivanie rezultatov obrazovaniya* [Criteria-based assessment of educational outcomes]. Perm, PGGPU Publ., 2012. 126 p.

UDC 378.147
doi: 10.18323/3034-2996-2025-3-62-3

Technology for organizing mathematical problem solving using the concept of stage-by-stage development of mental actions and criteria-based assessment when training future mathematics teachers

Olga V. Makeeva, PhD (Physics and Mathematics), assistant professor of Chair of Higher Mathematics
Ulyanovsk State Pedagogical University, Ulyanovsk (Russia)

E-mail: mov_ulspu@mail.ru ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4345-2296

Received 14.07.2025 *Revised 13.08.2025* *Accepted 16.09.2025*

Abstract: Mathematical knowledge, due to the specific nature of its acquisition through problem solving, plays a special role in the development of various forms of thinking. When solving mathematical problems through the interiorisation of heuristic techniques, a cultural form of creative thinking is formed. The acquisition of analytical heuristics can be influenced by specific methods of organizing the learning process. This paper describes a tool for organizing the teaching of mathematical problem solving as a process aimed at developing guidelines – heuristics – according to the third type of orientation of P.Ya. Galperin's theory of the stage-by-stage development of mental actions. The paper presents the results of a formative experiment on the acquisition of the proposed framework (the scheme for organizing mental activity, hereinafter referred to as the OMA) by future mathematics teachers while studying the integral calculus of one variable functions. Using the Mann–Whitney *U*-test, statistically significant differences in the levels of development of the Problem Setting Analysis heuristic were obtained in the control and experimental groups. Due to the small number of groups, a qualitative analysis of the experimental results was conducted. The feasibility of using the OMA framework to implement a strategy of complete acquisition and formative assessment is demonstrated. As it is hypothesized, the systematic use of the OMA framework in teaching to solve problems implements a third-type orientation teaching method and is appropriate for training maths teachers.

Keywords: teaching to solve mathematical problems; theory of stage-by-stage development of mental actions; third type of orientation; formative assessment; full acquisition; mathematics teacher education; integral calculus of one variable functions.

For citation: Makeeva O.V. Technology for organizing mathematical problem solving using the concept of stage-by-stage development of mental actions and criteria-based assessment when training future mathematics teachers. *Evidence-based education studies*, 2025, no. 3, pp. 39–53. DOI: 10.18323/3034-2996-2025-3-62-3.