УДК 378.1
doi: 10.18323/2221-5662-2022-3-51-58

О роли визуализации в обучении математике (на примере понятия функции)

Туктамышов Наил Кадырович[1], доктор педагогических наук, профессор, профессор кафедры «Высшая математика»
Горская Татьяна Юрьевна*[2], кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры «Высшая математика»
Казанский государственный архитектурно-строительный университет, Казань (Россия)

***E-mail: gorskaya0304@mail.ru**

[1]ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4679-0701
[2]ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7136-8388

Аннотация: В педагогическом сообществе постоянно идет дискуссия, посвященная разнице между визуальным и аналитическим мышлением, а также вопросам психолого-педагогического обоснования концепции наглядного обучения математике. Данная работа в продолжение этой дискуссии направлена на выявление понимания визуальных образов. Цель исследования состоит в выявлении роли образов в формировании математических понятий (на примере понятия функции). Новизна работы заключается в том, что образ рассматривается не как результат, а как условие понимания математического понятия. Использованы теоретические и экспериментальные методы исследования (анализ психолого-педагогических источников, тестирование, наблюдение). Для достижения цели разработаны специальные исследовательские вопросы. Выявлена роль влияния использования образов и представлений, исходно имеющихся в мышлении обучающегося, на эффективность понимания сущности математического понятия. Обнаружено, что наилучшие результаты понимания сущности математических понятий демонстрируют те студенты, которые владеют навыками и визуального, и аналитического мышления. Показано, что визуальный и аналитический виды мышления не всегда согласуются друг с другом, поэтому методически выверенное обучение математическим понятиям и отношениям должно быть соразмерно сбалансировано. Преобладание того или иного вида мышления у обучающихся носит индивидуальный характер. Учет в педагогической практике исходных образов, представлений и ассоциаций обучающихся – необходимое условие для успешного использования методов наглядного обучения. Визуализация является важным методом изучения математики, однако понимание математических понятий не предполагает изоморфизма между пониманием понятия и его образом.

Ключевые слова: визуализация; образ понятия функции; образ математического понятия; наглядное обучение математике.

Для цитирования: Туктамышов Н.К., Горская Т.Ю. О роли визуализации в обучении математике (на примере понятия функции) // Вектор науки Тольяттинского государственного университета. Серия: Педагогика, психология. 2022. № 3. С. 51–58. DOI: 10.18323/2221-5662-2022-3-51-58.

ВВЕДЕНИЕ

Польза визуализации при создании эффективных образовательных программ, в которых активно используются визуальные образы изучаемых объектов, в настоящее время очевидна, что подтверждается множеством публикаций на эту тему. Однако интерес представляет не только трансляция учебного материала визуальными средствами, но и то, какие образы формируются у обучаемых как отклик на визуальные ряды.

Так, в фундаментальной работе [1] авторы исследуют роль образов в формировании математических понятий, при этом утверждается, что на самом деле имеет место спектр видов мышления, в полюсах которых расположены алгебраический и геометрический виды. Таким образом, можно утверждать, что к вопросу визуализации нужно подходить дифференцированно, т. е. необходимо учитывать типы мышлений обучающихся, иначе применение визуализации не обеспечит ожидаемого результата. Визуализации в контексте философии математики и ее роли в математических доказательствах посвящена работа [2]. В ней показано, что учителя предлагают школьникам для углубления понимания учебного материала «перепроверять» доказательства теорем, используя примеры или визуальные образы. В [3; 4] с точки зрения психофизиологического подхода обсуждается возможность поиска целей, заданных геометрическим понятием. Например, исследователи четко контролируют уровень сходства цели и дистракторов [3]. Авторы [3; 4] обнаружили влияние факторов типа цели на характер дистрактора и, как следствие, на зрительный поиск объекта в процессе восприятия. В рамках образного мышления в науке в работе [5] в общих чертах рассматривается соотношение между абстрактным и наглядным методами в математике. В частности, показано, что образное мышление хорошо отзывается на геометрические образы, т. е. на наглядные (визуальные) методы. Исследование организации и моделирования предметно-пространственной среды у детей дошкольного возраста проведено в работе [6]. В [7] обсуждаются ценностно-результативные аспекты визуализации, аспекты создания методик и приемов обучения, развивающих у обучающихся способность создавать визуальные образы, за счет чего формируется культура визуализации.

В монографиях [8; 9] понятие образа изучается в контексте семиотики, причем считается, что образ – это один из компонентов знака. В исследованиях [10; 11] показано, что в процессе обучения ученики прибегают к ряду семиотических модальностей для понимания смысла математических понятий. Использование наглядного обучения позволяет преодолеть сухость логических структур и формализм применения понятий и теорем в процессе обучения. Принцип наглядности глубоко разработан в работах Е.И. Смирнова и его учеников [12]. Следует отметить, что существуют различные концепции наглядного обучения и подходы к нему [12; 13]. Степень осознанности понимания математических понятий исследовалась авторами [14]. Ими предложена модель, учитывающая степень сформированности математической грамотности, которая позволит выстраивать индивидуальные образовательные маршруты для обучающегося. Взаимосвязь между восприятием математического объекта и знаково-символической деятельностью раскрыта в [15]. В фундаментальной работе [12] приводится технология наглядного моделирования и подробный анализ истории использования наглядных методов обучения в математике. Как отмечается в [12], весьма важным является психолого-педагогическое обоснование концепции наглядного обучения математике. В этом свете существенно не только использование какого-либо метода наглядного обучения, но и выявление образов, представлений, уже имеющихся в мышлении обучаемых. Именно на эти образы и представления накладываются наглядные образы, предъявляемые преподавателем. Изучение этих исходных образов, наличие или отсутствие которых сильно влияет (как позитивно, так и негативно) на эффективность использования наглядных методов обучения, представляет собой отдельную проблему. Особенность данной работы заключается в том, что здесь образ рассматривается не как результат, а как условие понимания. Таким образом, исходные образы и представления исследуются с позиции соответствия содержанию изучаемого понятия (в нашем случае понятию функции).

Согласно исследованиям [16], схемы образов и их преобразования обеспечивают основу для мышления, рассуждения и воображения. С одной стороны, образ является результатом чувственного восприятия человека [17], с другой – итогом отражения существенных сторон объекта [18]. Первый подход предполагает наполнение образа различного рода деталями, а второй подход направлен в сторону создания абстракций, уменьшения числа деталей. Для математики большую значимость имеет второй подход.

Образ математического понятия – это не просто геометрическая картинка, а некоторое семантическое поле, которое связывает различные составляющие когнитивного опыта и является результатом абстрагирования и обобщения. В случае сформированности математических образов обучающийся оперирует не столько с заданными алгоритмами работы с математическими объектами, сколько с самими математическими объектами. Наличие образов позволяет представить математическое понятие целостно, хотя не всегда образ воспринимается учащимися адекватно [19].

В математике образ понимается как объект преобразования другого математического объекта и отличается от житейского понимания образа. Информация, которую на занятии транслирует преподаватель посредством слова, воспринимается обучающимся в виде каких-то образов или ассоциаций либо не воспринимается, если образ найден не будет. Для эффективного восприятия слов необходимо также иллюстрировать их смысл геометрически, формируя через это понятийное ядро предложенного учебного материала. В данной работе в движении к сущности понятия упор делается на образно-геометрическую модальность восприятия обучающихся.

Проанализируем формирование и роль понятийных образов на примере изучения понятия функции. В этой связи одним их важных аспектов формирования образов является его визуализация. А. Аркави определяет визуализацию следующим образом: «Визуализация – это способность, процесс и продукт создания, интерпретации, использования и размышления над картинками, изображениями, диаграммами, в нашем сознании, на бумаге или с помощью технологических инструментов, с целью отображения и передачи информации, обдумывания и развития ранее неизвестных идей и углубления понимания» [20, с. 217]. Ясно, что в процессе обучения математике визуализация может быть мощным инструментом для изучения математических объектов.

В данной работе представлены некоторые результаты изучения ментальных представлений студентов, касающихся понятия функции. При этом исходными образами считаются образы математических понятий, усвоенные учащимися в ходе обучения в школе. Исходные образы и их соответствие содержанию понятия функции изучаются через следующие исследовательские вопросы нашей работы:

1. Какие визуальные образы имеют студенты относительно понятия функции?
2. Как студенты работают с заданной визуализацией?
3. В какой степени студенты используют визуальные образы при исследовании функций?

Для ответа на эти вопросы был проведен констатирующий эксперимент.

Цель работы – исследование роли образов в формировании математических понятий на примере понятия функции.

МЕТОДИКА ПРОВЕДЕНИЯ ИССЛЕДОВАНИЯ

В исследовании использовались теоретические и экспериментальные методы (анализ психолого-педагогических источников, эссе, тестирование, наблюдение). В ходе практических и лекционных занятий изучалось понимание студентами всех аспектов понятия функции. Часть практических занятий была записана на камеру. Наблюдение за работой студентов во время учебных занятий и анализ учебного материала привели к созданию теста, содержащего несколько задач, связанных с пониманием функции, и эссе на тему, связанную с интерпретацией этого понятия. Студенты работали над этим вопросником в учебное время под наблюдением преподавателя. В данной работе мы сосредоточились на задачах и теоретических вопросах, раскрывающих различные аспекты образа функции.

Испытуемыми стали студенты трех групп первого курса Казанского государственного архитектурно-строительного университета направления подготовки «Строительство». Первая группа состояла из 27 студентов, вторая – из 28, а третья – из 26. В общей сложности был опрошен 81 студент.

Опрос осуществлялся исходя из предложенных вариантов тестовых заданий, содержащих как открытые, так и закрытые вопросы, а также включал задачи, требующие некоторого времени для выполнения.

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

О сформированности образа понятия функции в общеобразовательной средней школе

В учебниках алгебры и начала анализа за 10 класс изучение функции начинается с того, что одни числа связывают с другими. Например, числовая функция определяется как соответствие, которое связывает число x из множества $D(f)$, называемого областью определения, с числом y, зависящим от x по некоторому правилу, образующее множество значения $E(f)$. Рассмотрим на примере тригонометрических функций роль их образа в формировании у обучающихся понятия тригонометрических функций. Знакомство с тригонометрическими функциями ведется исходя из геометрической интерпретации. Для этого вводят декартову прямоугольную систему координат xOy с расположением осей под углом 90°: «Будем считать ось Ox расположенной горизонтально с положительным направлением слева направо, а ось Oy расположенной вертикально с положительным направлением снизу вверх. Рассмотрим окружность единичного радиуса с центром в начале координат. Такую окружность принято называть единичной или тригонометрической. Выполним поворот луча Ox на угол α относительно точки O, считая, что при положительных α поворот осуществляется против хода часовой стрелки, при отрицательных α – по ходу часовой стрелки, а при α=0 луч Ox остается на месте. При этом нам несущественно, в каких единицах выражена величина угла поворота α. Как принято в математике, мы будем пользоваться или градусной, или радианной мерой углов. Абсцисса точки пересечения с тригонометрической окружностью луча, полученного после поворота луча Ox на угол α относительно точки O, называется косинусом угла α и обозначается cosα, а ордината – синусом угла α и обозначается sinα» [1] (рис. 1).

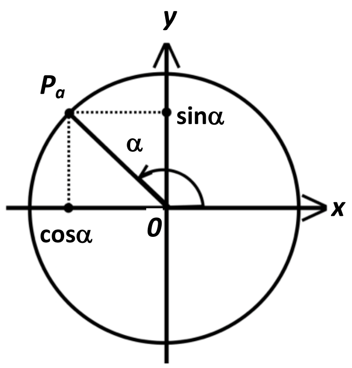


Рис. 1. *Тригонометрическая окружность*

Тригонометрическая функция определяется визуально и связывает угол с точками на единичной окружности[2]. Однако само понятие тригонометрической функции как математического объекта вводится не во всех учебниках, хотя основные формулы, связывающие тригонометрические функции, приводятся. Школьники изучают этот объект, как правило, визуально, а свойства его заучиваются в виде таблиц формул. После того как студенты получат первое представление о тригонометрических функциях угла на единичной окружности, им сложно переключиться на общее понятие тригонометрической функции, принять ее как функцию на числовой оси (рис. 2). Приходится ломать устоявшееся представление, хотя первые построения графика синусоиды (рис. 3) приводятся еще в школе. Таким образом, изучение общего понятия функций вступает в некий конфликт с уже устоявшимися представлениями основных элементарных тригонометрических функций. В 11 классе в определение тригонометрической функции добавляется соответствие между множеством вещественных чисел x и отрезком $y \in [-1; 1]$[3], а также вводятся понятия области определения и множества значений на уровне формул. Одиннадцатиклассники находят для функций, определяемых как линейные комбинации тригонометрических функций, области определения и множества значений, решая тригонометрические уравнения. Однако первокурсники слабо справляются с заданиями, связанными с пониманием сущности определения функции, введенного в курсе математического анализа, нахождением их области определения и множества значений. Определение образа для аргумента (прообраза) функции на примере тригонометрических функций является для большинства невыполнимой работой. В школе достаточно подробно изучается тригонометрия треугольников, а не тригонометрия периодических функций.

О формировании понятия функции в высшей школе

В курсе высшей математики определение функции задается как некое правило или отображение, которое ставит в однозначное соответствие каждой независимой переменной x из множества, называемого областью определения функции, зависимую переменную y из множества значений функции. При этом пишут: $y=f(x)$, $x \in D(f)$, $y \in E(f)$. Таким образом, функция переводит, или отображает, элементы одного множества $D(f)$ в элементы другого $E(f)$. Данное определение представляет измененный образ функции. Если формально в школе, например, сформировался образ тригонометрической функции синуса как ординаты точки единичной окружности, соответствующей заданному углу, то дополнить до нового содержания образа функции синуса для некоторых студентов становится препятствием (рис. 1).

Рассмотрим пример: задаем функцию $y=\sin x$, где $x \in R$, $y \in [-1; 1]$. Данная функция является 2π-периодической, нечетной. Далее рассмотрим функцию $y=\sin x$,

[1] *Алгебра и начала анализа: учебник для 10-11 классов общеобразовательных учреждений / под ред. А.Н. Колмогорова. 17-е изд. М.: Просвещение, 2008. 384 с. С. 14–15.*

[2] *См. 1.*

[3] *Алгебра и начала математического анализа: учебник для 11 классов общеобразовательных учреждений: базовый и профильный уровень / под ред. А.Б. Жижеченко. 2-е изд. М.: Просвещение, 2010. 336 с. С. 3.*

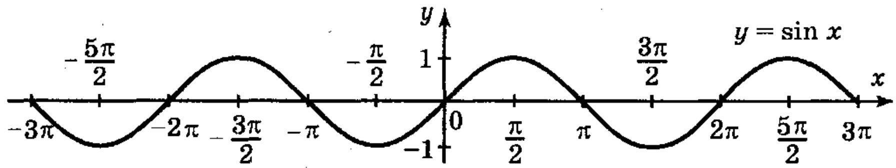


Рис. 2. *График функции синуса*

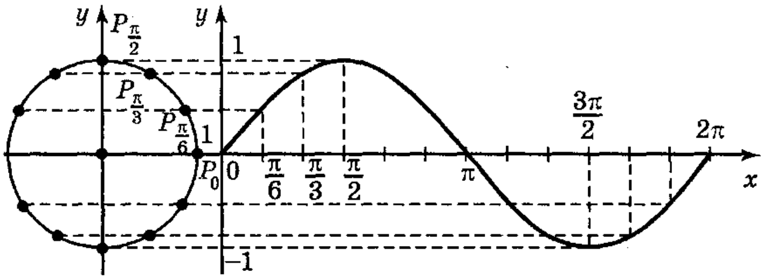


Рис. 3. *Построение графика синусоиды*

где $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $y \in [-1; 1]$. Эта функция обладает другими свойствами, она обратима, т. е. имеет обратную функцию $y=\arcsin x$, где $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $x \in [-1; 1]$, а также нечетная. Кроме того, график этой функции расположен в отрезке $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и совпадает на нем с предыдущей функцией, вне этого отрезка график не существует, в отличие от графика функции на рис. 2. Следовательно, несмотря на одинаковое написание самой функции, они отличаются между собой существенным образом. Такой когнитивный диссонанс возникает у тех студентов, у которых графический образ функции синуса тесно связан с ее школьной трактовкой через тригонометрическую окружность. Задача нахождения образа функции через график функции вызывает у студентов серьезные затруднения.

Ниже приведем результаты экспериментов, соответствующих исследовательским вопросам.

Визуальные образы функции

Для получения информации о том, какие визуальные образы понятия функции у студентов сформированы, им было предложено ответить на вопрос: «Как Вы понимаете определение функции, можете ли охарактеризовать ее графически?»

Если судить по результатам опроса, то большинство студентов четко не представляют себе, что определение функции предполагает наличие двух множеств (области определения и области значения) и правила, устанавливающего соответствие между элементами этих множеств. Они путают указанные множества, часто не осознают, что график функции и представляет собой соответствие, правило, по которому сопоставляются элементы множеств, не понимают важности однозначного соответствия между элементами областей. Знания студентов о графической интерпретации функции можно представить двояко: одни функции представляют либо геометрически без введения системы координат, либо графически в системе координат *xOy*.

Вместе с тем заметим, что, как показали эксперименты, понимание сущности понятия функции коррелирует с формой визуального представления функции. Графическое задание функции дает целостное представление о функции и позволяет наглядно видеть свойства функций (возрастание, убывание, наличие экстремумов и т. д.), но плохо соотносится с решением задач, связанных с выяснением свойств функций через вычисления. Аналитическое задание функции (в виде формул) приводит к тому, что студент концентрируется на вычислениях, забывая об определении функции и существенных свойствах заданных функций. В этом отношении тригонометрические функции представляют особую сложность для понимания, так как в записи этих функций не виден непосредственно алгоритм вычисления значений функций (невозможно подобно степенным функциям непосредственно вычислить значения функции), поэтому аналитический подход в вычислениях тригонометрических функций возможен, если студенты знают свойства этих функций. Результаты анализов ответов на понимание определения функции представлены в таблице 1.

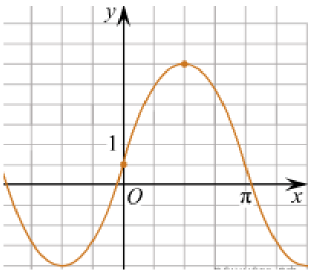
Кроме того, было предложено написать эссе – рассуждение на тему ассоциаций, связанных с понятием функции. Приведем пример ассоциации студента на вопрос о функции: «*У меня это ассоциируется с планом, т. е. распорядком дня. Время – это переменная x, а дело или деятельность – это функция времени*». Тем самым каждому времени суток соответствует деятельность. Как видно, ассоциации весьма далеки от математики.

Таблица 1. *Понимание определения функции*

Корректный ответ	Некорректный ответ	Ответа нет
38 (47 %)	38 (47 %)	5 (6 %)

Применение визуального образа функции

Для ответа на второй исследовательский вопрос студентам было предложено решить задачу. На рисунке изображена функция $y=a\sin x+b$. Найдите a и b.



Анализ полученных результатов показал, что многие студенты решили задачу, исходя в основном из графика. Они по клеточкам получили нужное значение параметра. И только треть из них подошла к этому заданию с аналитической точки зрения, составив, исходя из графика, систему уравнений для определения неизвестных параметров. Интересно то, что нахождение b непосредственно из графика вызывало бóльшие трудности, чем нахождение параметра a. Эти результаты показывают доминирование в процессе решения задачи визуальной составляющей понятия, но проведение при этом простейших алгебраических преобразований и рассуждений вызывало у студентов значительные затруднения. Малое количество правильных ответов свидетельствует также о том, что образное мышление и аналитическое мышление не согласованы (таблица 2).

Степень использования визуальных образов функции

Глубина понимания математических понятий позволяет, как было показано выше, эффективнее осваивать новые математические знания, следовательно, важным вопросом является способность (возможность) студентов использовать визуальные образы при исследовании функций.

Для выяснения степени использования визуальных образов студентам были предложены для решения следующие задания.

Задание № 1. Найдите образ функции $f(x)=3-\cos x$, $x\in R$.

Задание № 2. Решите неравенство: $2\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\geq 1$.

Анализ решений задания № 1 представлен в таблице 3. В формулировке задания требуется найти образ функции. Как было отмечено выше, в математике образ и прообраз носят вполне конкретный характер. Здесь еще более выпукло проявилось непонимание определения функции, отмеченное в первом исследовательском вопросе. Вместе с тем, отвечая на этот вопрос, некоторые студенты поделились своими мыслями и ассоциациями по поводу образа. Приведем одно из высказываний: «*Образ элемента как в искусстве, характеризуется видом функции, ее графиком. Попробую его описать так, функция косинуса. Образ ее – это, скорее всего то, как именно она задана*». Как видно из этого высказывания, у студента возникла путаница между определением и заданием функции. Приведенная ассоциация в целом отражает какое-то видение тригонометрической функции, но выражено оно столь приближенно, что не позволяет использовать такие представления (ассоциации) в математике.

Приведем анализ результатов выполнения задания № 2. Отметим, что студенты пользовались только единичной окружностью и в основном корректно выполнили задание те, кто ясно понимал, как пользоваться тригонометрической окружностью. Графиком функции $\cos x$ на плоскости Oxy для решения задачи никто не воспользовался, хотя именно этот график позволяет

Таблица 2. *Умение находить значения функций для заданных значений аргументов, нахождение неизвестных параметров функции по их графику*

Решено корректно	Решено некорректно	Не решено
28 (34,6 %)	44 (54,3 %)	9 (11,1 %)

Таблица 3. *Нахождение множества значений функции*

Решено корректно	Решено некорректно	Не решено
2 (2,5 %)	40 (49,5 %)	39 (48 %)

Таблица 4. *Использование графика функции при решении неравенства*

Решено корректно	Решено некорректно	Не решено
19 (23,5 %)	40 (49,5 %)	22 (27 %)

весьма наглядно найти все множество решений данного неравенства. В школе, по-видимому, основное внимание уделялось изучению тригонометрических функций с помощью тригонометрической окружности в ущерб другим представлениям этих функций. Алгоритмическим путем без применения графических представлений решить неравенство никто не попытался. Таким образом, вновь можно наблюдать разбалансированность в использовании алгебраических (аналитических) и геометрических методов решения математических задач, что приводит к расплывчатому представлению о функции. Те студенты, которые график применить не смогли, с заданием не справились. Результаты решения неравенства представлены в таблице 4.

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Выбранные исследовательские вопросы убедительно подчеркивают некоторые важные аспекты, присущие визуализации. С одной стороны, визуализация оказывается полезным инструментом для работы над проблемами. Использование визуализации позволяет студентам избежать трудностей, связанных с вычислительными процедурами, а также позволяет в целом увидеть как саму проблему, так и способы ее решения. Это видно на примере решения задач второго исследовательского вопроса.

С другой стороны, визуализация вызывает некоторые трудности. Так, в задаче № 2 студенты не могут провести простейшие вычисления, а при решении тригонометрического неравенства испытывают затруднения в нахождении всего множества решений. Привязанность к одному геометрическому представлению (тригонометрической окружности, что в сущности означает привязанность к геометрии прямоугольных треугольников, а не к понятию функции) не позволяет использовать другие геометрические представления, что свидетельствует об отсутствии гибкости в использовании студентами геометрических представлений. Студенты проявили свою способность к визуализации, однако видно, что это ограниченное понимание визуализации. Например, ограниченная визуализация оказывается помехой в решении тригонометрического неравенства задания № 2. Отметим также, что графическое представление (способ задания) функции не всегда способствует пониманию строгого определения функции, а порой и ограничивает его. Так, у студентов не должно складываться впечатления, что любую функцию можно представить геометрически, поэтому чрезмерный упор на визуализацию может помешать студенту осознать строгое определение функции.

Обнаружено, что визуальное и аналитическое мышление не всегда согласуются друг с другом, поэтому в рамках методически выверенного обучения математическим понятиям и отношениям использование аналитических и визуальных методов обучения должно быть соразмерно сбалансировано. При этом преобладание того или иного вида мышления носит индивидуальный характер.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

Раскрыта роль исходных геометрических образов в понимании студентами определения функции, а также выявлена степень использования визуальных образов при исследовании функций и отношений.

Из полученных результатов эксперимента следует вывод: либо изучению функций, ее свойств, графической интерпретации в школе отводится мало времени, либо методика преподавания этого раздела математики, дидактические единицы, используемые для изучения данного раздела, не обеспечивают эффективности обучения. Возможно, школьников в основном натаскивают на решение тестов ЕГЭ без глубокого понимания предмета.

Показано, что выявление исходных образов, представлений и ассоциаций является необходимым условием для эффективного использования методов наглядного обучения.

Установлено, что студенты, владеющие навыками и визуального, и аналитического мышления, достигают лучших результатов в формировании образов математических понятий, адекватных истинным их образам.

Визуализация является важным методом изучения математики, однако понимание математических понятий не предполагает изоморфизма между пониманием понятия и его образом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Giaquinto M. Visual thinking in mathematics. New York: Oxford University Press, 2007. 298 p.
2. Hanna G., Sidoli N. Visualisation and proof: A brief survey of philosophical perspectives // ZDM – International Journal on Mathematics Education. 2007. Vol. 39. № 1-2. P. 73–78. DOI: 10.1007/s11858-006-0005-0.
3. Дренева А.А., Кричевец А.Н., Чумаченко Д.В., Шварц А.Ю. Экстрофовеальный анализ категориально заданных трехмерных фигур // Сибирский психологический журнал. 2019. № 72. С. 68–92. DOI: 10.17223/17267080/72/4.
4. Dreneva A., Shvarts A., Chumachenko D., Krichevets A. Extrafoveal processing in categorical search for geometric shapes: general tendencies and individual variations // Cognitive Science. 2021. Vol. 45. № 8. Article number e13025. DOI: 10.1111/cogs.13025.
5. Куланин Е.Д., Степанов М.С., Нуркаева И.М. Роль образного мышления в научном мышлении // Моде-

лирование и анализ данных. 2020. Т. 10. № 2. С. 110–128. DOI: 10.17759/mda.2020100209.
6. Дыбина О.В. Моделирование предметно-пространственной среды посредством модульных конструкторов // Вектор науки Тольяттинского государственного университета. Серия: Педагогика, психология. 2017. № 1. С. 31–37. DOI: 10.18323/2221-5662-2017-1-31-37.
7. Аранова А.В. Культурологическая тенденция визуализации учебной информации в школьном обучении // Известия Российского государственного педагогического университета им. А.И. Герцена. 2019. № 193. С. 107–115. EDN: XOGQAT.
8. Осипов Г.С., Панов А.И., Чудова Н.В., Кузнецов Ю.М. Знаковая картина мира субъекта деятельности. М.: Физматлит, 2017. 260 с.
9. Presmeg N., Radford L., Roth W.-M., Kadunz G. Signs signification. Semiotics in Mathematics Education Research. Switzerland: Springer, 2018. 372 p.
10. Radford L. Body, matter and signs in the constitution of meaning in mathematics // Sémiotique et apprentissages scientifique. Paris: ISTE edition, 2022. P. 245–280.
11. Schou M.H., Bikner-Ahsbahs A. Unpacking hidden views: seven ways to treat your formula // Educational Studies in Mathematics. 2022. Vol. 109. № 3. P. 639–659. DOI: 10.1007/s10649-021-10092-7.
12. Наглядное моделирование в обучении математике: теория и практика / под ред. Е.И. Смирнова. Ярославль: ЯГПУ, 2007. 454 с.
13. Фридман Л.М. Наглядность и моделирование в обучении. М.: Знание, 1984. 79 с.
14. Жолудева В.В. Некоторые особенности построения содержания математического образования не экономического профиля // Актуальные проблемы математики и методики её преподавания. Пенза: Пензенский государственный педагогический университет им. В.Г. Белинского, 2001. С. 214–218.
15. Салмина Н.С. Знак и символ в обучении. М.: МГУ, 1988. 288 с.
16. Gibbs R.W., Colston H.L. The cognitive psychological reality of image schemas and their transformations // Cognitive Linguistics. 1995. Vol. 6. № 4. P. 347–378. DOI: 10.1515/cogl.1995.6.4.347.
17. Возрастные и индивидуальные особенности образного мышления учащихся / под ред. И.С. Якиманской. М.: Педагогика, 1989. 224 с.
18. Визуальное мышление в структуре научного познания / под ред. И.С. Якиманской. М.: Педагогика, 1989. 195 с.
19. Aspinwall L., Shaw K.L., Presmeg N.C. Uncontrollable mental imagery: Graphical connections between a function and its derivative // Educational Studies in Mathematics. 1997. Vol. 33. № 3. P. 301–317. DOI: 10.1023/A:1002976729261.
20. Arcavi A. The role of visual representations in the learning of mathematics // Educational Studies in Mathematics. 2003. Vol. 52. № 3. P. 215–241. DOI: 10.1023/A:1024312321077.

REFERENCES

1. Giaquinto M. *Visual thinking in mathematics*. New York, Oxford University Press Publ., 2007. 298 p.
2. Hanna G., Sidoli N. Visualisation and proof: A brief survey of philosophical perspectives. *ZDM – International Journal on Mathematics Education*, 2007, vol. 39, no. 1-2, pp. 73–78. DOI: 10.1007/s11858-006-0005-0.
3. Dreneva A.A., Krichevets A.N., Chumachenko D.V., Shvarts A.Yu. Extrafoveal analysis of categorically defined stereometric shapes. *Sibirskiy psikhologicheskiy zhurnal*, 2019, no. 72, pp. 68–92. DOI: 10.17223/17267080/72/4.
4. Dreneva A., Shvarts A., Chumachenko D., Krichevets A. Extrafoveal processing in categorical search for geometric shapes: general tendencies and individual variations. *Cognitive Science*, 2021, vol. 45, no. 8, article number e13025. DOI: 10.1111/cogs.13025.
5. Kulanin E.D., Stepanov M.S., Nurkaeva I.M. The role of imaginative thinking in scientific thinking. *Modelirovanie i analiz dannykh*, 2020, vol. 10, no. 2, pp. 110–128. DOI: 10.17759/mda.2020100209.
6. Dybina O.V. Modeling of object-spatial environment by means of modular construction kits. *Vektor nauki Tolyattinskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Pedagogika, psikhologiya*, 2017, no. 1, pp. 31–37. DOI: 10.18323/2221-5662-2017-1-31-37.
7. Aranova A.V. The culturological tendency in visual representation of educational information in secondary education. *Izvestiya Rossiyskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. A.I. Gertsena*, 2019, no. 193, pp. 107–115. EDN: XOGQAT.
8. Osipov G.S., Panov A.I., Chudova N.V., Kuznetsov Yu.M. *Znakovaya kartina mira subekta deyatelnosti* [The sign picture of the world of the subject of activity]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2017. 260 p.
9. Presmeg N., Radford L., Roth W.-M., Kadunz G. *Signs signification. Semiotics in Mathematics Education Research*. Switzerland, Springer Publ., 2018. 372 p.
10. Radford L. Body, matter and signs in the constitution of meaning in mathematics. *Sémiotique et apprentissages scientifique*. Paris, ISTE edition Publ., 2022, pp. 245–280.
11. Schou M.H., Bikner-Ahsbahs A. Unpacking hidden views: seven ways to treat your formula. *Educational Studies in Mathematics*, 2022, vol. 109, no. 3, pp. 639–659. DOI: 10.1007/s10649-021-10092-7.
12. Smirnov E.I., ed. *Naglyadnoe modelirovanie v obuchenii matematike: teoriya i praktika* [Visual Modeling in Teaching Mathematics: Theory and Practice]. Yaroslavl, YaGPU Publ., 2007. 454 p.
13. Fridman L.M. *Naglyadnost i modelirovanie v obuchenii* [Visualization and modeling in teaching]. Moscow, Znanie Publ., 1984. 79 p.
14. Zholudeva V.V. Some peculiarities of constructing the content of mathematical education of non-economic profile. *Aktualnye problemy matematiki i metodiki ee prepodavaniya*. Penza, Penzenskiy gosudarstvennyy pedagogicheskiy universitet im. V.G. Belinskogo Publ., 2001, pp. 214–218.
15. Salmina N.S. *Znak i simvol v obuchenii* [Sign and Symbol in Learning]. Moscow, MGU Publ., 1988. 288 p.
16. Gibbs R.W., Colston H.L. The cognitive psychological reality of image schemas and their transformations. *Cognitive Linguistics*, 1995, vol. 6, no. 4, pp. 347–378. DOI: 10.1515/cogl.1995.6.4.347.

17. Yakimanskaya I.S., ed. *Vozrastnye i individualnye osobennosti obraznogo myshleniya uchashchikhsya* [Age and individual features of figurative thinking of student]. Moscow, Pedagogika Publ., 1989. 224 p.
18. Yakimanskaya I.S., ed. *Vizualnoe myshlenie v strukture nauchnogo poznaniya* [Visual thinking in the structure of scientific cognition]. Moscow, Pedagogika Publ., 1989. 195 p.
19. Aspinwall L., Shaw K.L., Presmeg N.C. Uncontrollable mental imagery: Graphical connections between a function and its derivative. *Educational Studies in Mathematics*, 1997, vol. 33, no. 3, pp. 301–317. DOI: 10.1023/A:1002976729261.
20. Arcavi A. The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 2003, vol. 52, no. 3, pp. 215–241. DOI: 10.1023/A:1024312321077.

On the role of visualization in teaching mathematics (using an example of the concept of function)

Nail K. Tuktamyshov[1], Doctor of Sciences (Pedagogy), Professor, professor of Chair "Advanced Mathematics"

Tatyana Yu. Gorskaya*[2], PhD (Engineering), Associate Professor, assistant professor of Chair "Advanced Mathematics"

Kazan State University of Architecture and Engineering, Kazan (Russia)

***E-mail: gorskaya0304@mail.ru**

[1]ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4679-0701
[2]ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7136-8388

Abstract: In the teaching community, there is an ongoing discussion about the difference between visual and analytical thinking and the issues of psychological-pedagogical argumentation of the concept of visual teaching mathematics. Following the discussion, this paper is aimed to identify visual images understanding. The research objective is to identify the role of images in the formation of mathematical concepts (using an example of the concept of function). The novelty of the work is that an image is considered not as a result but as a condition for mathematical concept understanding. The authors used theoretical and experimental methods of study (the analysis of psychological and pedagogical sources, testing, and survey). To achieve the goal, special examinational questions were developed. The authors identified the role of influence of using images and concepts initially existing in the student's mind on the efficiency of understanding the essence of a mathematical concept. The study revealed that students who have the skills of both visual and analytical thinking demonstrate the best results of understanding mathematical concepts. The research shows that visual and analytical types of thinking not always comply with each other, therefore, methodologically verified teaching mathematical concepts and relations should be proportionally balanced. The prevalence of any type of thinking by the students is individual. The essential prerequisite for successful application of visual teaching methods is to take into account the initial images, ideas, and associations of students in teaching. Visualization is an important method of learning mathematics; however, understanding mathematical concepts does not suppose isomorphism between understanding of a concept and its image.

Keywords: visualization; image of the concept of function; mathematical concept image; visual teaching mathematics.

For citation: Tuktamyshov N.K., Gorskaya T.Yu. On the role of visualization in teaching mathematics (using an example of the concept of function). *Vektor nauki Tolyattinskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Pedagogika, psikhologiya*, 2022, no. 3, pp. 51–58. DOI: 10.18323/2221-5662-2022-3-51-58.