УДК 37.037

ФОРМИРОВАНИЕ ПРИЕМОВ ЭВРИСТИЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ УЧАЩИХСЯ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЫ

Н.А. Демченкова, кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры «Алгебра и геометрия»
И.В. Антонова, кандидат педагогических наук, доцент кафедры «Алгебра и геометрия»
Н.В. Разуваева, магистр направления подготовки «Педагогическое образование»
Тольяттинский государственный университет, Тольятти (Россия)

Ключевые слова: эвристическая деятельность; эвристические приемы; организация эвристической деятельности учащихся.

Аннотация: Работа посвящена методическим аспектам формирования приемов эвристической деятельности учащихся общеобразовательной школы в процессе обучения математике. В статье разработаны требования к содержанию учебного материала в условиях организации эвристической деятельности на уроках математики; обоснована методика формирования приемов эвристической деятельности в процессе обучения математике учащихся общеобразовательной школы с помощью определенной типологии задач; описана методика формирования приемов эвристической деятельности учащихся при изучении темы «Координатно-векторный метод в пространстве».

Национальная доктрина образования провозглашает создание максимально благоприятных условий для выявления и развития творческих способностей каждого гражданина России. Требования к предметным результатам освоения курса математики Федерального государственного образовательного стандарта среднего (полного) общего образования (утвержден приказом Минобрнауки от 17 мая 2012 г.) должны отражать:

– сформированность представлений о математических понятиях как о важнейших математических моделях, позволяющих описывать и изучать различные процессы и явления; понимание возможности аксиоматического построения математических теорий;

– владение методами доказательств и алгоритмов решения; умение их применять, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;

– владение основными понятиями о плоских и пространственных геометрических фигурах, их основных свойствах; сформированность умения распознавать на чертежах, моделях и в реальном мире геометрические фигуры; применение изученных свойств геометрических фигур и формул для решения геометрических задач и задач с практическим содержанием;

– сформированность умений моделировать реальные ситуации, исследовать построенные модели, интерпретировать полученный результат [1].

Отмеченные компетенции достижимы учащимися в процессе реализации эвристической деятельности в условиях применения учителем математики эвристических приемов в процессе их обучения математике.

Вопросы организации эвристической деятельности и формирования эвристических приемов в настоящее время все чаще становятся предметом исследования. В работах В.И. Андреева, В.Н. Введенского, Ю.Н. Кулюткина, И.Г. Липатниковой, Т.Ю. Паршиной, Д. Пойа, В.Н. Пушкина, Е.И. Скафы и др. рассматриваются психологические и дидактические аспекты эвристической деятельности. В исследованиях Л.В. Виноградовой, В.А. Гусева, Ю.М. Колягина, Г.И. Саранцева, С.Р. Мугаллимовой, О.К. Огурцовой, Н.Л. Стефановой, Л.М. Фридмана раскрываются методические аспекты организации эвристической деятельности учащихся на уроках математики.

Современный взгляд на эвристическое обучение учащихся в общеобразовательной школе связан с формированием эвристик как цели обучения на уроке, предполагает овладение учащимися совокупностью разнообразных действий и эвристических приемов. Один из способов формирования основ эвристической деятельности учащихся многие исследователи (Г.Д. Балк, М.Б. Балк, В.А. Далингер, Ю.М. Колягин, Д. Пойа, Г.И. Саранцев, В.А. Уфнаровский, Л.М. Фридман, Р.А. Хабиб, А.Я. Цукарь и др.) видят в обучении решению математических задач.

Таким образом, **актуальность** темы исследования обусловлена сложившимися к настоящему времени противоречиями между:

– социальным заказом общества на воспитание творческой личности, способной адаптироваться в быстро меняющихся условиях современной жизни, готовой к преобразующей деятельности в различных ситуациях, и недостаточной разработанностью теории и методики организации эвристической деятельности учащихся в процессе обучения математике;

– потребностью педагогов в разработке эффективных приемов организации эвристической деятельности учащихся и их отсутствием в теории и методике обучения математике.

Указанные противоречия позволили сформулировать **проблему исследования:** выявление методических особенностей организации эвристической деятельности в процессе обучения математике учащихся общеобразовательной школы.

Цель исследования – разработка методических основ формирования приемов эвристической деятельности в процессе обучения математике учащихся общеобразовательной школы.

Новизна проведенного исследования заключается в том, что в нем выявлены методические особенности формирования приемов эвристической деятельности в процессе обучения математике учащихся общеобразовательной школы, решена задача формирования эвристических приемов посредством использования соответствующей системы математических задач.

Педагоги считают эвристику наукой о средствах и методах решения задачи; психологи – разделом психологии, изучающим творческое мышление; философы термин «эвристика» приписывают таким правилам или утверждениям, которые способствуют открытию нового; кибернетики считают, что эвристика – это методы и способы, связанные с улучшением эффективности системы (человека или машины), решающей задачи. Эвристическая деятельность или эвристические процессы, хотя и включают в себя умственные операции в качестве важного своего компонента, вместе с тем обладают некоторой спецификой. Именно поэтому эвристическую деятельность следует рассматривать как разновидность человеческого мышления, которая создает новую систему действий или открывает неизвестные ранее закономерности окружающих человека объектов (или объектов изучаемой науки) [2].

Определим понятия эвристической деятельности и эвристического приема, представим соответствующую классификацию.

С.Р. Мугаллимова [3] определяет эвристическую деятельность как компонент учебно-познавательной деятельности школьников по разрешению проблемных ситуаций, который связывает продуктивную деятельность с репродуктивной. По мнению автора, эвристическая деятельность школьников формируется на основе применения эвристических приемов. Под термином «эвристический прием» автор понимает преобразующее действие, применение которого позволяет (хотя не гарантирует) найти ключевую идею для решения проблемной задачи и свести ее решение к использованию уже известных алгоритмов.

Классификация эвристических приемов, разработанная Г.И. Саранцевым, включает такие приемы, как аналогия, обобщение, прием элементарных задач, прием представления задачи в пространстве, прием рассмотрения предельного случая, прием вспомогательной фигуры [4]. В свою очередь, С.Р. Мугаллимова также выделяет шесть видов эвристических приемов: трансляция, реверсия, варьирование объекта, варьирование среды, индукция, акцентуализация [3]. В таблице, представленной ниже, приведена характеристика каждого из указанных приемов.

Прием	Характеристика
Акцентуализация	Заключается в выделении из совокупности объектов ключевого элемента (группы ключевых элементов) с целью сведения данной проблемы к проблеме более узкой, с меньшей структурой или с меньшим количеством связей
Варьирование объекта	Заключается в изменении одной или нескольких характеристик исходной совокупности элементов или перегруппировки связей внутри этой совокупности
Трансляция	Заключается в поиске инструментария, позволяющего через установление аналогий перейти к другой проблеме, имеющей более предпочтительный характер (из другой, более близкой области; в силу большей наглядности; имеющей четкий алгоритм решения и т.п.)
Реверсия	Основана на поиске в противоположном направлении (от заключения к условию), приводящем к заданному условию или же обнаружению противоречий
Индукция	Представляет собой динамическое действие, требующее расширения совокупности элементов, составляющих проблему, и установления закономерности внутри новой совокупности
Варьирование среды	Заключается в изменении условий, окружающих данную совокупность элементов, в результате чего должны переструктурироваться связи внутри этой системы

Следует отметить, что эвристические приемы, описанные Г.И. Саранцевым, находят свое полное отражение в приемах, выделенных С.Р. Мугаллимовой. Соответствие эвристических приемов этих авторов отражено в схеме на рис. 1.

Для дальнейшей работы по реализации цели исследования необходимо разработать требования к содержанию учебного материала при организации эвристической деятельности учащихся на уроках математики и типологию эвристических задач.

Проанализировав соответствующую психолого-педагогическую и методическую литературу, представим требования к содержанию учебного материала по реализации эвристической деятельности учащихся:

– учебный материал должен быть доступен учащимся класса;

– учебный материал должен обеспечивать актуализацию необходимых знаний и способов деятельности;

– учебный материал должен обеспечивать возможность создания проблемных ситуаций на уроке;

– учебный материал должен содержать задачи, направленные на развитие эвристической деятельности учащихся.

Если учебный материал должен содержать математические задачи, направленные на формирование приемов эвристической деятельности у учащихся в процессе обучения математике, то определим их типологию:

– *задачи с неполным или избыточным условием* (задачи с недостаточной, избыточной или противоречивой исходной информацией; задачи на составление условия самими учащимися);

– *задачи на обнаружение закономерностей* (наличие задач, в результате выполнения которых у учащихся складывается определенный способ решения задач данного типа);

– *задачи на выявление оптимального способа решения* (задачи, в которых предусматривается оптимальный способ решения);

– *задачи на обнаружение противоречия и формулировку проблемы* (задачи, в ходе выполнения которых возникает противоречие между уже имеющимися способами решения и неизвестными);

– *задачи на разработку алгоритмических и эвристических предписаний* (задачи, направленные на формирование навыков выведения формул, формулирования правил);

– *исследовательские задачи* (задачи на выявление различных свойств, задачи с параметром);

– *задачи логические* (задачи на объяснение и доказательство, на установление причинно-следственных связей).

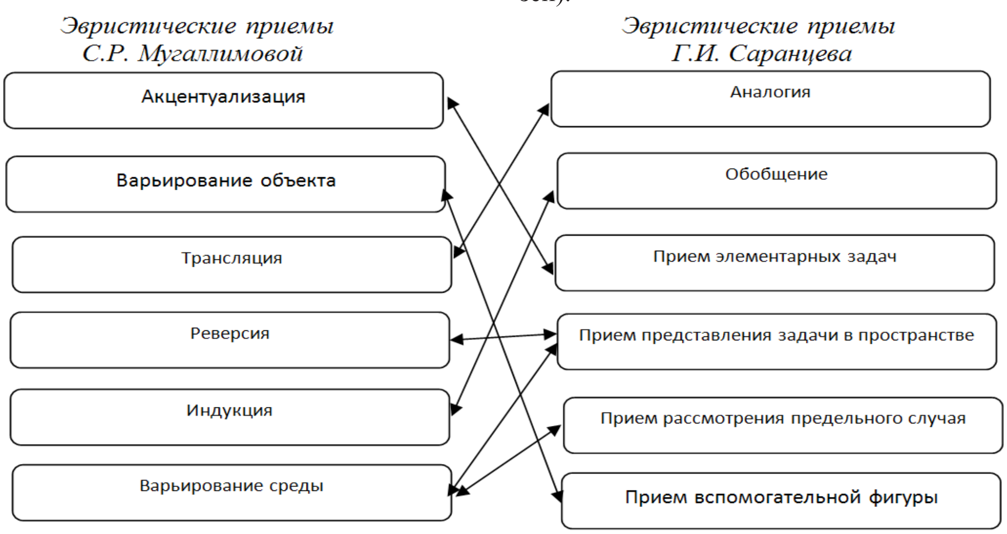
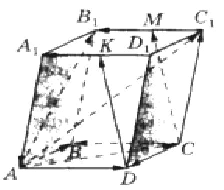


Рис. 1. *Соответствие эвристических приемов С.Р. Мугаллимовой и Г.И. Саранцева*

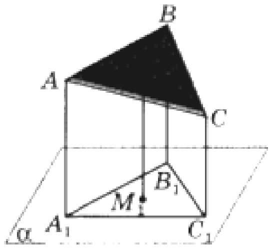
В качестве примера представим описание методики организации эвристической деятельности учащихся при изучении темы «Координатно-векторный метод в пространстве». Здесь на основе классификации эвристических приемов (С.Р. Мугаллимова), а также описанной выше типологии задач нами рассмотрена взаимосвязь эвристических приемов и задачного материала, направленного на формирование приемов эвристической деятельности учащихся.

Акцентуализация	
Задачи на обнаружение закономерностей	1. Может ли длина суммы двух векторов быть: а) меньше длины каждого из слагаемых; б) равной сумме длин слагаемых; в) больше суммы длин слагаемых? Ответ обоснуйте. 2. Вычислите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если длины и угол между ними равны соответственно: а) 4; 5; 60º; б) 2; 7; $\frac{\pi}{4}$; в) 4; 5; 120º; г) 7; 9; 90º; д) 14; 0,35; 180º; е) 2; 2; 0. 3. На какое число нужно умножить ненулевой вектор $\vec{a}$, чтобы получить вектор $\vec{b}$, удовлетворяющий следующим условиям: а) $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$ и $\lvert\vec{b}\rvert = \lvert\vec{a}\rvert$; б) $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$ и $\lvert\vec{b}\rvert = 3\lvert\vec{a}\rvert$; в) $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$ и $\lvert\vec{b}\rvert = k\lvert\vec{a}\rvert$; г) $\vec{b} = \vec{0}$
Задачи на выявление оптимального способа решения	Упростите выражение: а) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{HM} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{PE} + \overrightarrow{HM}$; б) $\overrightarrow{CK} - \overrightarrow{EM} - \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{KM} + \overrightarrow{PC}$; в) $\overrightarrow{KM} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{KE} + \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MP}$; г) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{HM}$
Задачи на разработку алгоритмических и эвристических предписаний	1. Векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют базис в пространстве. Будут ли образовывать базис пространства векторы: а) $x\vec{a}, y\vec{b}, z\vec{c}$; б) $\vec{a} + \vec{b}, \vec{b} + \vec{c}, \vec{c} + \vec{a}$ [59]. 2. Для данных ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ известно, что $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0$. Докажите, что $\lvert\vec{a}\rvert = \lvert\vec{b}\rvert$, и выясните геометрический смысл данного равенства. 3. Длины векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ соответственно равны 1; 2; 2; $(\widehat{\vec{a};\vec{b}}) = 90°$; $(\widehat{\vec{b};\vec{c}}) = 120°$. При каких значениях *x* вектор $\vec{a} - \vec{b}$ перпендикулярен вектору $\vec{a} + \vec{b} - x \cdot \vec{c}$?
Исследовательские задачи	1. Какой знак имеет скалярное произведение двух векторов, если угол между ними: а) равно нулю; б) больше нуля; в) меньше нуля. 2. Справедливо ли утверждение: а) любые два противоположно направленных вектора коллинеарны; б) любые два коллинеарных вектора сонаправлены; в) любые два вектора коллинеарны; г) любые два сонаправленных вектора равны; д) если $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$, $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{c}$, то $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{c}$; е) существуют векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ такие, что $\vec{a}$ и $\vec{c}$ не коллинеарны, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ не коллинеарны, а $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны? 3. Известно, что $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{CD}$, причем точки A, B и C не лежат на одной прямой. При каком значении *k* прямые AC и BD являются: а) параллельными; б) пересекающимися? Могут ли прямые AC и BD быть скрещивающимися? 4. При каком условии скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$: а) положительно, б) отрицательно; в) равно нулю?
Задачи логические	1. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точки P, H и K – середины ребер соответственно A_1D_1, CC_1 и AB. Докажите, что плоскость HPK проходит через точку O пересечения диагоналей параллелепипеда. 2. Справедливы ли утверждения: а) два вектора, коллинеарные ненулевому вектору, коллинеарны между собой;

Задачи логические	б) два вектора, сонаправленные с нулевым вектором, сонаправлены; в) два вектора, коллинеарные ненулевому вектору, сонаправлены? 3. Известно, что $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, причем векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ попарно несонаправлены. Докажите, что $\lvert\vec{p}\rvert < \lvert\vec{a}\rvert + \lvert\vec{b}\rvert + \lvert\vec{c}\rvert$ [18]	
Варьирование среды		
Задачи на обнаружение закономерностей		На рисунке изображен параллелепипед, точки *M* и *K* – середины ребер B_1C_1 и A_1D_1. Назовите вектор, который получится, если отложить: а) от точки C вектор, равный $\overrightarrow{DD_1}$ б) от точки D вектор, равный $\overrightarrow{CM}$; в) от точки A_1 вектор, равный $\overrightarrow{AC}$; г) от точки C_1 вектор, равный $\overrightarrow{CB}$; д) от точки M вектор, равный $\overrightarrow{KA_1}$
Задачи на выявление оптимального способа решения	1. Вершины треугольника ABC расположены по одну строну от плоскости α и находятся от этой плоскости на расстояниях 4 дм, 5 дм и 9 дм. Найдите расстояние от точки пересечения медиан треугольника до плоскости α. 2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка M лежит на ребре AA_1, причем AM: MA_1 =3:1, а точка N – середина ребра BC. Вычислите косинус угла между прямыми: а) MN и DD_1; б) MN и BD; в) MN и B_1D; г) MN и A_1C	
Задачи на разработку алгоритмических и эвристических предписаний	1. Пусть $\overrightarrow{MK}$ – равнодействующая трех сил, приложенных в точке *M* и равных $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}$ и $\overrightarrow{MC}$, где *A, B и C* – вершины правильного треугольника, вписанного в окружность с центром *O*. Найдите отношение длин отрезков *MK* и *MO*. 2. На трех некомпланарных векторах $\vec{p} = \overrightarrow{AB}, \vec{q} = \overrightarrow{AD}, \vec{r} = \overrightarrow{AA_1}$ построен параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Разложите по векторам $\vec{p}, \vec{q}$ и $\vec{r}$ векторы, образованные диагоналями этого параллелепипеда	
Исследовательские задачи	1. Назовите все векторы, образованные ребрами параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, которые: а) противоположны вектору $\overrightarrow{CB}$; б) противоположны вектору $\overrightarrow{B_1A}$; в) равны вектору $-\overrightarrow{DC}$; г) равны вектору $-\overrightarrow{A_1B_1}$. 2. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в котором $AB = AD = a, AA_1 = 2a$. В вершинах B_1 и D_1 помещены заряды q, а в вершине A – заряд 2q. Найдите абсолютную величину результирующей напряженности электрического поля: а) в точке A; б) в точке C; в) в центре грани $A_1B_1C_1D_1$; г) в центре грани ABCD	
Задачи логические	1. Диагонали параллелограмма ABCD пересекаются в точке O. Докажите, что для любой точки M пространства справедливо неравенство $MO < \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$. 2. Медианой тетраэдра называется отрезок, соединяющий вершину тетраэдра с точкой пересечения медиан противоположной грани. Докажите, что медианы тетраэдра пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении 3:1, считая от вершины	
Трансляция		
Задачи на обнаружение закономерностей	1. Векторы $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}$ и $\overrightarrow{MC}$ некомпланарны. Определите взаимное расположение отрезка MK и плоскости ABC, если: а) $\overrightarrow{MK} = 0{,}3\overrightarrow{MA} + 0{,}4\overrightarrow{MB} + 0{,}2\overrightarrow{MC}$;	

Задачи на обнаружение закономерностей	б) $\overrightarrow{MK}=0{,}37\overrightarrow{MA}+0{,}25\overrightarrow{MB}+0{,}38\overrightarrow{MC}$; в) $\overrightarrow{MK}=0{,}7\overrightarrow{MA}-0{,}4\overrightarrow{MB}+0{,}8\overrightarrow{MC}$; г) $\overrightarrow{MK}=0{,}38\overrightarrow{MA}+0{,}43\overrightarrow{MB}-0{,}81\overrightarrow{MC}$. 2. Известно, что векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны. Компланарны ли векторы: а) $\vec{a}, 2\vec{b}$, $3\vec{c}$; б) $\vec{a}+\vec{b},\ \vec{a}+2\vec{c},\ 2\vec{b}-3\vec{c}$
Задачи на выявление оптимального способа решения	1. Найдите величину угла между плоскостями 2x+2y–z–2=0 и 5x+12y–2=0. 2. Найдите величину двугранного угла, образованного плоскостями x+2y–2z–7=0 и 3x+4y+12z+1=0 и содержащего начало координат
Задачи на обнаружение противоречия и формулировку проблемы	На каждой из осей координат найдите такую точку, расстояние от которой до точки *B* (3;–4; $\sqrt{7}$) является наименьшим среди всех расстояний от точек этой оси точки *B*
Задачи на разработку алгоритмических и эвристических предписаний	1. Докажите, что если точка M – центроид треугольника ABC, то $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$. 2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед. Пусть $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AA_1}=\vec{c}$. С помощью этого параллелепипеда убедитесь в справедливости следующих векторных равенств: а) $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\overrightarrow{(a+b)}+\vec{c}=(\vec{c}+\vec{a})+\vec{b}$; б) $\vec{a}+(\vec{b}-\vec{c})=(\vec{a}-\vec{c})+\vec{b}$; в) $\vec{a}-(\vec{b}-\vec{c})=\overrightarrow{(a-b)}+\vec{c}=(\vec{a}+\vec{c})-\vec{b}$; г) $\vec{a}-(\vec{b}+\vec{c})=\overrightarrow{(a-b)}-\vec{c}=(\vec{a}-\vec{c})-\vec{b}$ [59]. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Пусть $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AA_1}=\vec{c}$. В базисе $(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})$ найдите координаты следующих векторов: а) $\overrightarrow{AC_1}$; б) $\overrightarrow{AD_1}$; в) $\overrightarrow{AB_1}$; г) $\overrightarrow{AC}$; д) $\overrightarrow{A_1C}$; е) $\overrightarrow{D_1B}$. 3. Точки *M* и *N* – середины оснований *AB* и *CD* трапеции *ABCD*, а *O* – произвольная точка пространства. Выразите вектор $\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{ON}$ через векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$. 4. Даны точки *A* (–5; 7; 3) и *B* (3;–11; 1). а) на оси *Ox* найдите точку, ближайшую к середине отрезка *AB*. б) найдите точки, обладающие аналогичным свойством, на осях *Oy* и *Oz*. 5. Изобразите множество точек пространства, для которых $x^2+4zy=y^2+4z^2$. 6. Найдите геометрическое место таких точек *M* (*x; y; z*), которые равноудалены от начала координат и от точки *P* (2; –3; 8)
Исследовательские задачи	1. *PABC* – правильный тетраэдр с ребром 1. Точка *O* – цетроид основания *ABC*; точки *H*, *E* и *K* – середины ребер соответственно *BC*, *CP* и *AB*. Найдите: 1) длину отрезка: а) *PO*; б) *KE*; 2) угол между векторами: а) $\overrightarrow{PA}$ и $\overrightarrow{PH}$; б) $\overrightarrow{PA}$ и $\overrightarrow{BE}$; в) $\overrightarrow{HP}$ и $\overrightarrow{CK}$. 2. Даны точки *A* (1; 0; *k*), *B* (–1; 2; 3) и *C* (0; 0; 1). При каких значениях *k* треугольник *ABC* является равнобедренным?
Задачи логические	1. Точки A и C симметричны относительно точки O и $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$. Симметричны ли точки *B* и *D* относительно точки *O*? 2. Докажите, что точки пересечения медиан треугольника *ABC* с вершинами $A(x_1; y_1; z_1)$ $B(x_2; y_2; z_2)$, $C(x_3; y_3; z_3)$ имеют координаты $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}; \frac{y_1+y_2+y_3}{3}; \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$

Индукция	
Задачи на обнаружение закономерностей	1. Коллинеарны ли векторы: а) $\vec{a}\{3;6;8\}$ и $\vec{b}\{6;12;16\}$; б) $\vec{c}\{1;-1;3\}$ и $\vec{d}\{2;3;15\}$ в) $\vec{i}\{1;0;0\}$ и $\vec{j}\{0;1;0\}$; г) $\vec{m}\{0;0;0\}$ и $\vec{n}\{5;7;-3\}$; д) $\vec{p}\left\{\frac{1}{3};-1;5\right\}$ и $\vec{q}\{-1;-3;-15\}$. 2. Компланарны ли векторы: а) $\vec{a}\{-3;-3;0\}$, $\vec{i}$ и $\vec{j}$; б) $\vec{b}\{2;0;-3\}$, $\vec{i}$ и $\vec{j}$; в) $\vec{c}\{1;0;-2\}$, $\vec{i}$ и $\vec{k}$; г) $\vec{d}\{1;-1;2\}, \vec{e}\{-2;0;1\}$ и $\vec{f}\{5;-1;0\}$; д) $\vec{m}\{1;0;2\}, \vec{n}\{1;1;-1\}$ и $\vec{p}\{-1;2;4\}$; е) $\vec{q}\{0;5;3\}, \vec{r}\{3;3;3\}$ и $\vec{s}\{1;1;4\}$?
Задачи на выявление оптимального способа решения	1. Докажите, что сумма квадратов расстояний от любой точки сферы, описанной около куба, до всех вершин куба есть величина постоянная. Найдите эту величину. 2. Докажите, что сумма квадратов расстояний от любой точки шара, вписанного в куб, до всех вершин куба есть величина постоянная. Найдите эту величину. 3. Докажите, что геометрическое место точек, сумма квадратов расстояний которых до всех вершин октаэдра с ребром 1, равна 6, есть описанный около октаэдра шар
Задачи на разработку алгоритмических и эвристических предписаний	1. Найдите точку, равноудаленную от точек *A* (–2; 3; 5) и *B* (3; 2; –3) и расположенную на оси: а) *Ox*; б) *Oy*; в) *Oz*. 2. Даны точки *A* (–1; 2; 3), *B* (–2; 1; 2) и *C* (0; –1; 1). Найдите точку, равноудаленную от этих точек и расположенную на координатной плоскости: а) *Oxy*; б) *Oyz*; в) *Ozx*. 3. Изобразите множество точек пространства, для которых *xyz*=0. 4. Изобразите множество точек пространства, для которых $x^2+4zy=y^2+4z^2$. 5. Для каждого а определите множество точек, заданных уравнением $x^2+4x+y^2-2y+z^2=a$. 6. Какой геометрический смысл имеют коэффициенты *a, b, c* в уравнении плоскости $ax+by+cz+d=0$
Исследовательские задачи	1. Может ли длина суммы нескольких векторов быть равной сумме длин этих векторов? 2. Может ли длина разности двух ненулевых векторов быть равной сумме длин этих векторов? 3. Может ли длина разности двух ненулевых векторов быть равна длине разности этих векторов?
Логические задачи	1 *а*. Следует ли из $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$, что $\vec{b}=\vec{c}$? 1 *б*. Известно, что для любого вектора $\vec{p}$ верно $\vec{a}\cdot\vec{p}=\vec{b}\cdot\vec{p}$. Верно ли, что $\vec{a}=\vec{b}$. 2. Числа k и l не равны друг другу. Докажите, что если векторы $\vec{a}+k\vec{b}$ и $\vec{a}+l\vec{b}$ не коллинеарны, то а) векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны; б) векторы $\vec{a}+k_1\vec{b}$ и $\vec{a}+l_1\vec{b}$ не коллинеарны при любых неравных числах k_1 и l_1
Варьирование объекта	
Задачи на обнаружение противоречия и формулировку проблемы	Для данной неплоской замкнутой ломаной, состоящей из шести звеньев, построены два треугольника, вершинами каждого из которых служат середины несмежных звеньев. Докажите, что центроиды этих треугольников совпадают
Задачи на разработку алгоритмических и эвристических предписаний	1. PABC– тетраэдр. Постройте такую точку M, что справедливо равенство $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PM}=0$.

Задачи на разработку алгоритмических и эвристических предписаний	2. Даны точки A, B, C, и D. Представьте вектор $\overrightarrow{AB}$ в виде алгебраической суммы следующих векторов: а) $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BD}$; б) $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{CB}$; в) $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{BC}$.  3. Точки A_1, B_1, C_1 и M_1 – основания перпендикуляров, проведенных к плоскости α из вершин треугольника *ABC* и из точки *M* пересечения медиан треугольника (рисунок). Докажите, что: $MM_1 = \frac{1}{3}(AA_1 + BB_1 + CC_1)$. Останется ли верным равенство, если какие-то стороны треугольника *ABC* пересекаются с плоскостью α?
Задачи на обнаружение закономерностей	Докажите, что четырёхугольник *ABCD* является параллелограммом, если: 1) *A* (0; 2; –3); *B* (–1; 1; 1); *C* (2; –2; –1); *D* (3; –1; –5); 2) *A* (2; 1; 3); *B* (1; 0; 7); *C* (–2; 1; 5); *D* (–1; 2; 1)
Задачи на выявление оптимального способа решения	1. В наклонной треугольной призме проведено сечение, пересекающее все ее боковые ребра. Докажите, что центроиды сечения и оснований призмы лежат на одной прямой. 2. Все плоские углы трехгранного угла MABC равны α. Прямая MP образует со всеми его ребрами углы, равные φ, а со всеми гранями – углы, равные ψ. Найдите величины углов φ и ψ
Задачи на выявление оптимального способа решения	Докажите, что четырёхугольник *ABCD* с вершинами в точках *A* (1; 3; 2), *B* (0; 2; 4), *C* (1; 1; 4), *D* (2; 2; 2) является параллелограммом
Логические задачи	Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Укажите вектор $\vec{x}$, начало и конец которого являются вершинами параллелепипеда, такой, что: а) $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{D_1A_1} + \overrightarrow{CD_1} + \vec{x} + \overrightarrow{A_1C_1} = \overrightarrow{DB}$; б) $\overrightarrow{DA} + \vec{x} + \overrightarrow{D_1B} + \overrightarrow{AD_1} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DC}$
Исследовательские задачи	В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1AA_1 = AB = AD = 1$ угол DAB=60º, угол A_1AD равен $A_1AB = 90°$. Вычислите: а) $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{D_1C_1}$; б) $\overrightarrow{BC_1}$, $\overrightarrow{D_1B}$; в) $\overrightarrow{AC_1}, \overrightarrow{AC}$; г) $\lvert\overrightarrow{DB_1}\rvert$; д) $\lvert\overrightarrow{A_1C}\rvert$; е) $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{DA_1}\overrightarrow{D_1B}}\right)$; ж) $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AC_1}\overrightarrow{DB_1}}\right)$

Данная методика организации эвристической деятельности учащихся при изучении темы «Тригонометрические функции», разработанная авторами, раскрыта в статье [5]. Таким образом, на основе классификации эвристических приемов С.Р. Мугаллимовой, а также описанной выше типологии задач, нами рассмотрена взаимосвязь эвристических приемов и задачного материала, направленного на формирование приемов эвристической деятельности.

В заключение приведем результаты проведенного исследования. В представленной статье:

– разработаны требования к содержанию учебного материала в условиях организации эвристической деятельности учащихся на уроках математики;

– обоснована методика формирования приемов эвристической деятельности в процессе обучения математике учащихся общеобразовательной школы с помощью определенной типологии задач;

– описана методика формирования приемов эвристической деятельности учащихся при изучении темы «Координатно-векторный метод в пространстве».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Стандарт среднего (полного) общего образования по математике. URL: www.school.edu.rU/attach/8/282.doc
2. Разуваева Н.В., Демченкова Н.А. Эвристические приемы обучения математике учащихся общеобразовательной школы // Практика использования естественнонаучных методов в прикладных социально-гуманитарных исследованиях: сборник материалов научно-методического семинара. Тольятти: ТГУ, 2014. Ч. 2. С. 210-217.
3. Мугаллимова С.Р. Формирование эвристических приемов у учащихся в процессе обучения решению задач векторным методом : автореф. дис. ... канд. пед.

наук. Омск: Омский государственный педагогический университет, 2008. 41 с.
4. Саранцев Г.И. Общая методика преподавания математики. Саранск: Красный Октябрь, 1999. 208 с.
5. Разуваева Н.В., Демченкова Н.А. Формирование приемов эвристической деятельности на примере изучения тригонометрических функций // Вестник магистратуры. 2014. № 9 (36). С. 37-44.

THE DEVELOPMENT OF TECHNIQUES OF HEURISTIC ACTIVITY IN THE PROCESS OF TEACHING MATHEMATICS TO COMPREHENSIVE SCHOOL STUDENTS

N.A. Demchenkova, PhD (Pedagogy), Associate Professor, assistant professor of Chair “Algebra and Geometry”
I.V. Antonova, PhD (Pedagogy), assistant professor of Chair “Algebra and Geometry”
N.V. Razuvaeva, master of Pedagogical education degree program, master program “Mathematical Education”
Togliatti State University, Togliatti (Russia)

Keywords: heuristic activity; heuristic techniques; organization of heuristic activity of students.

Abstract: The paper covers the methodical aspects of the development of techniques of heuristic activity of the comprehensive school students in the process of learning mathematics. The authors developed the requirements for the educational material content in the conditions of the organization of their heuristic activities during mathematics lessons, proved the technique of development of methods of heuristic activities in the process of teaching mathematics to the comprehensive school students with the help of a certain tasks typology, and described the technique of development of methods of the students’ heuristic activity while learning the topic “Coordinate-vectorial method in space”.