УДК 519.63

НЕКОТОРЫЕ ПОДХОДЫ К РЕШЕНИЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

М.С. Спирина, кандидат педагогических наук, доцент кафедры «Высшая математика»
А.А. Гудков, студент
Поволжский государственный университет сервиса, Тольятти (Россия)

Ключевые слова: булева логика; булевы функции; дифференцирование; решение дифференциальных уравнений; дифференциальные уравнения булевых функций.

Аннотация: В статье рассматриваются некоторые подходы к решению дифференциальных уравнений булевых функций на конкретных примерах. Целью работы является представление достаточно сложных вопросов на простейших примерах.

Приведены примеры решения дифференциальных уравнений в частных производных. Материал статьи будет полезен тем, кто только начинает заниматься изучением данного направления.

Введение

Современная экономика использует цифровые системы для управления потоками передаваемой информации. Актуальной и значимой становится возможность описания динамического развития технических систем на основе методов логического дифференциального исчисления. Представив описание функционирования цифровых систем в виде дифференциальных операторов и логических дифференциальных уравнений, мы получаем возможность для анализа и изучения сложных динамических систем с дискретными состояниями и изменениями их свойств. Результаты анализа позволяют в дальнейшем синтезировать новые системы, обладающие свойством самодиагностики за счет повышения их чувствительности при достаточной помехозащищенности.

Булево дифференциальное исчисление возникло как потребность обработки электрических инженерных задач в области кодов, исправляющих ошибки тестирования передачи сигналов по каналам цифровых коммутационных цепей. Учитывая, что современные сетевые и коммуникационные технологии постоянно совершенствуются, потоки передаваемой информации увеличиваются, актуальным остается вопрос эффективного и помехозащищенного кодирования информации. Поэтому появление новых инструментов в виде булевых дифференциальных исчислений может внести свой вклад в повышение результативности работы технических специалистов в сфере защиты информации, передаваемой цифровым способом. Также отметим, что в настоящее время оно может быть использовано для моделирования деятельности конечных автоматов, дискретных событий динамических систем. Это одно из современных направлений исследований, связанных с разделом дискретной математики, которое особенно актуально для средств цифровой обработки данных.

В последнее время появились публикации об использовании булевых функций при решении дифференциальных уравнений. В основном это зарубежные публикации. Сейчас это направление развивается и в нашей стране.

Постановка проблемы в общем виде и ее связь с важными научными и практическими задачами обосновывается стоящими перед страной приоритетами экономического развития, среди которых становление высокотехнологичной сети коммуникаций современной связи и безопасной передачи информации по цифровым каналам является одной из наиболее важных проблем (Л.В. Глухова [1]).

В этой связи происходит постоянный поиск новых инструментов для повышения помехозащищенности сетевых коммуникаций. Растет потребность в специалистах технического профиля, имеющих навыки практического решения возникающих проблемных вопросов в компьютерных системах. Корректировку сбойных ситуаций специалисты выполняют на основе использования существующего математического аппарата, с учетом арифметико-логических основ взаимодействия составных компонентов вычислительной техники и компьютерных коммуникаций. Эффективными математическими инструментами являются алгебра логики, методы дискретной математики и логического дифференциального исчисления. Они позволяют моделировать в динамике деятельность сложных систем и оценивать их состояние в текущий момент времени (С.С. Марченков [2], А.В. Чернов [3], А.Д. Закревский [4], М.С. Спирина [5], Ю.П. Шевелев [6], О.Н. Ярыгин [7]).

Вопрос эффективности применения булевой алгебры в настоящее время не вызывает сомнения. Истоками ее зарождения можно считать далекий 19 век, когда Джорж Буль заложил основы алгебры логики, построенной на логических высказываниях. Для каждого из высказываний выполняется оценка утверждением, имеющим определенное значение: истинное или ложное (Yanushkevich [8], Postnoff [9], Steinbah [10]).

Сегодня ключевые принципы булевой алгебры положены в основу арифметико-логических операций, производимых в памяти компьютера; во всех языках программирования присутствует логический тип обработки данных. Поэтому подготовка специалистов в области информационных технологий и вычислительных систем должна включать изучение не только основ булевой алгебры или дискретной математики, но и формировать практические навыки применения дифференциальных вычислений. Тогда на практике они смогут применять их для управления возникающими сбойными ситуациями в сложных технических системах (О.Н. Ярыгин [11; 12], A.D. Talanchev [13]).

Анализ последних исследований и публикаций, в которых рассматриваются аспекты вышеописанных проблем (B. Steinbach and Ch. Posthoff [14; 15], F.M. Brown [16]) отражает растущий интерес к области дифференцирования функций алгебры логики. В дальнейшем в статье авторы опираются на выводы работ зарубежных авторов прошлого века (S.B. Akers [17], A. Thayse [18]), D. Bochmann ([19], R. Scheuring, H. Wehlan [20]), современные работы в этом направлении и способы решения дифференциальных уравнений булевых функций (B. Steinbach and Ch. Posthoff [21]), а также на собственные изыскания.

Булевы функции от n аргументов представляют собой в дискретной математике отображение Bn → B, где B = {0,1} – булево множество. Здесь элементы булева множества {1, 0} обычно интерпретируются как логические значения «истинно» и «ложно», хотя в общем случае они рассматриваются как формальные символы, не несущие определённого смысла [22].

В настоящее время булевы функции продолжают изучаться. Появляются работы, в которых рассматриваются особенности дифференцирования булевых функций.

Необходимость изучения этих направлений обосновывается потребностью управления сложными динамическими системами с дискретными состояниями, а также при моделировании и исследовании состояний конечных автоматов, что и предопределило выбор темы исследования, сформировало цели данной статьи, которые в общем виде можно сформулировать следующим образом: рассмотреть на конкретных примерах решение простейших дифференциальных уравнений булевых функций. Новизна практических выводов заключается в том, что в нашей стране мало внимания уделяется данному вопросу и в публикациях решение практических примеров в этой области исследования фактически отсутствует.

Изложение основного материала статьи состоит в следующем. За основу логического решения дифференциальных уравнений булевых функций возьмем известный математический аппарат классического дифференциального исчисления для вещественных функций одного или нескольких действительных переменных. Это понятия производной, в которой обосновывается, как изменение аргумента влияет на изменение значения функции и понятие дифференциала.

Рассмотрим простой и чаще всего используемый в приложениях подход, базирующийся на двухэлементной булевой алгебре со множеством B = {0,1} на булевых бинарных переменных $x \in \{0,1\}$ и на векторах переменных $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ в логическом пространстве.

Известно, что булева функция $f(\overline{x})$ описывается отображением $f : B^k \to B$ и множество из n функций описывается как $F = \{f_1, \ldots, f_n\}$ и может быть представлено в виде карт $f : B^k \to B^n$ [22].

Логическое уравнение булевых функций в общем виде $f_i(\overline{x}) = f_j(\overline{x})$ может быть описано в виде однородного уравнения $f(\overline{x}) = 0$ совместно с $f(\overline{x}) = f_i(\overline{x}) \oplus f_j(\overline{x})$ и множествами из одновременных равенств $\{f_1 = 0, \ldots, f_n = 0\}$, которые всегда могут быть комбинированы в единую форму вида $f_1 + \ldots + f_n = 0$. Здесь и в последующем знак $\oplus$ обозначает сложение по модулю 2, или операцию исключающего «или» (XOR).

Подойдем к достижению поставленных целей поэтапно: сначала введем понятие производной и рассмотрим его, затем введем понятие дифференциала и дифференциального уравнения, а затем приведем примеры решения дифференциальных уравнений булевых функций.

Рассмотрим производную булевых функций более подробно.

Предположим, что $x \in B$ и $\overline{y} \in B^m$. Тогда производная от булевой функции $\partial f(x, \overline{y}) / \partial x$, где сама булева функция описывается как $f(x, \overline{y})$ по отношению к переменной *x* есть функция $\partial f / \partial x : B^m \to B$, имеющая вид, представленный в формуле (1) или (2).

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f(0, \overline{y}) \oplus f(1, \overline{y}) \ . \qquad (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f(x, \overline{y}) \oplus f(x', \overline{y}) \cdot \qquad (2)$$

Она принимает значение единицы только тогда, когда изменение значения х изменяет и значение f.

Максимальное и минимальное значения функции $f(x, \overline{y})$ по отношению к переменной $\mathbf{x}$ изменяются по формулам (3) и (4) соответственно.

$$\max_x f = f(x, \overline{y}) + f(x', \overline{y}) \cdot \qquad (3)$$

$$\min_x f = f(x, \overline{y}) f(x', \overline{y}) \cdot \qquad (4)$$

Пусть $\overline{x} \in B^k$ и $\overline{y} \in B^m$.

Тогда, производная $\partial^k f(\overline{x}, \overline{y}) / \partial \overline{x}$ булевой функции $f(\overline{x}, \overline{y})$ по отношению к *k* переменным в «*x*» есть функция $\partial^k f / \partial \overline{x} : B^m \to B$, вычисляемая по формуле (5).

$$\frac{\partial^k f}{\partial \overline{x}} = \frac{\partial^k f}{\partial x_1 \ldots \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\ldots \frac{\partial f}{\partial x_k} \right) \cdot \qquad (5)$$

Максимум и минимум функции по отношению к нескольким переменным определяется соответственно.

Рассмотрим дифференцирование.

Пусть переменная *dx* определена выражением (6) и называется дифференциалом переменной x, и описывает ее приращение (*dx*). Кроме того, вектор (7) назовем дифференциалом $\overline{x}$.

$$|dx = \begin{cases} 1, \text{если x изменяет свое значение} \\ 0, \text{если x остается константой} \end{cases} \qquad (6)$$

$$\partial \overline{x} = \overline{x} \oplus \overline{x}^* \qquad (7)$$

Он описывает приращение составляющих вектора $\overline{x}$, когда $\overline{x}$ изменяется совместно с другими значениями.

Отметим, что в B^k $\overline{x}$ является точкой и $d\overline{x}$ – это направление от $\overline{x}$ к $\overline{x}^*$. Итоговое значение дифференциала булевой функции $f(\overline{x})$ показано в формуле (8).

$$df = f(\overline{x}) \oplus f(\overline{x} \oplus d\overline{x}) \, . \qquad (8)$$

Дифференциальное уравнение в частных производных для булевой функции $f(\overline{x}, \overline{y})$ по отношению к аргументу $\overline{x}$ показано в формуле (9).

$$d_{\overline{x}} f = df \, | d\overline{y} = 0 \ . \qquad (9)$$

А *k*-й частный дифференциал булевой функции $f(\overline{x}, \overline{y})$ по отношению к $\overline{x}$ можно представить в виде формулы (10).

$$d^{\,k}_{\,x} f = d_{x_1}(\ldots d_{x_k} f(\overline{x}, \overline{y}) \ . \qquad (10)$$

Таким образом, дифференциальные уравнения булевых функций $f(\overline{x}, d\overline{x}) = 0$, а также булевых уравнений могут быть решены на основе дифференциальных операторов.

Рассмотрим пример 1.

Пусть имеется булева функция *f* (x_1, x_2, x_3), заданная следующим выражением:

$$f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \vee x_1 \overline{x_3} \ .$$

Будем использовать формулу (2) для дифференцирования по каждой переменной с изменением переменных по x_1, x_2, x_3 и их изменения попарно.

Имеем:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = x_2 \vee \overline{x_3};$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1 \oplus x_1\overline{x_3} = x_1(1 \oplus \overline{x_3}) = x_1 x_3;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = x_1 x_2 \oplus x_1 = x_1(x_2 \oplus 1) = x_1\overline{x_2};$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1, \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) = 1 \oplus \overline{x_3} = x_3;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial(x_1, x_2)} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \oplus \frac{\partial f}{\partial x_2} \oplus \frac{\partial^2 f}{\partial x_1, \partial x_2} = (x_2 \vee \overline{x_3}) \oplus x_1 x_3 \oplus x_3 =$$

$$= (x_2 \vee \overline{x_3}) \oplus x_3(x_1 \oplus 1) = (x_2 \vee \overline{x_3}) \oplus \overline{x_1} x_3 = (x_2 \vee \overline{x_3})\,\overline{\overline{x_1} x_3} \vee$$

$$\vee \overline{(x_2 \vee \overline{x_3})}\,\overline{x_1} x_3 = (x_2 \vee \overline{x_3})(x_1 \vee \overline{x_3}) \vee \overline{x_2} x_3 \overline{x_1} x_3 = \overline{x_3} \vee x_1 x_2 \vee$$

$$\vee \overline{x_1}\,\overline{x_2} x_3 = \overline{x_3} \vee x_1 x_2 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}.$$

Определим $\frac{\partial^3 f}{\partial(x_1, x_2, x_3)}$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1, \partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) = x_2 \oplus 1 = \overline{x_2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2, \partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = x_1$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_1, \partial x_2, \partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2, \partial x_3}\right) = 1$$

Используя формулу (2) для решения дифференциального уравнения с изменением сразу трех переменных, получим:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial(x_1, x_2, x_3)} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \oplus \frac{\partial f}{\partial x_2} \oplus \frac{\partial f}{\partial x_3} \oplus \frac{\partial^2 f}{\partial x_1, \partial x_2} \oplus \frac{\partial^2 f}{\partial x_1, \partial x_3} \oplus$$

$$\oplus \frac{\partial^2 f}{\partial x_2, \partial x_3} \oplus \frac{\partial^3 f}{\partial x_1, \partial x_2, \partial x_3} = (x_2 \vee \overline{x_3}) \oplus x_1 x_3 \oplus x_1 \overline{x_2} \oplus x_3 \oplus$$

$$\oplus \overline{x_2} \oplus x_1 \oplus 1 = (x_2 \vee \overline{x_3}) \oplus x_3(x_1 \oplus 1) \oplus \overline{x_2}(x_1 \oplus 1) \oplus \overline{x_1} =$$

$$= (x_2 \vee \overline{x_3}) \oplus \overline{x_1} x_3 \oplus \overline{x_1}\,\overline{x_2} \oplus \overline{x_1} = (x_2 \vee \overline{x_3}) \oplus \overline{x_1} x_3 \oplus \overline{x_1}(\overline{x_2} \oplus 1) =$$

$$= ((x_2 \vee \overline{x_3})\,\overline{\overline{x_1} x_3} \vee \overline{x_2 \vee \overline{x_3}}\,\overline{x_1} x_3) \oplus \overline{x_1} x_2 = ((x_2 \vee \overline{x_3})(x_1 \vee \overline{x_3}) \vee$$

$$\vee \overline{x_2} x_3 \overline{x_1} x_3) \oplus \overline{x_1} x_2 = (\overline{x_3} \vee x_1 x_2 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}) \oplus \overline{x_1} x_2 = (\overline{x_3} \vee x_1 x_2 \vee$$

$$\vee \overline{x_1}\,\overline{x_2})\,\overline{\overline{x_1} x_2} \vee \overline{(\overline{x_3} \vee x_1 x_2 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2})}\,\overline{x_1} x_2 = (\overline{x_3} \vee x_1 x_2 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2})$$

$$(x_1 \vee \overline{x_2}) \vee x_3(\overline{x_1} \vee \overline{x_2})(x_1 \vee x_2)\,\overline{x_1} x_2 = x_1 \overline{x_3} \vee x_1 x_2 \vee \overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee$$

$$\vee \overline{x_1}\,\overline{x_2} \vee \overline{x_1} x_2 x_3 = x_1 \overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee x_1 x_2 \overline{x_3} \vee x_1 x_2 x_3 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee$$

$$\vee \overline{x_1}\,\overline{x_2} x_3 \vee \overline{x_1} x_2 x_3.$$

Таким образом, получим результат решения дифференциального уравнения булевой функции в виде

$$g(x_1, x_2, x_3) = x_1 \overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee x_1 x_2 \overline{x_3} \vee x_1 x_2 x_3 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2} x_3 \vee$$

$$\vee \overline{x_1} x_2 x_3.$$

Получается, что булево дифференциальное уравнение вида

$$\frac{\partial^3 f(x_1, x_2, x_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} = g(x_1, x_2, x_3)$$

включает неизвестную функцию $g(x_1, x_2, x_3)$

Тогда в рассмотренном выше примере решение дифференциального уравнения будет иметь следующий вид:

$$\frac{\partial^3 f(x_1, x_2, x_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} = x_1 \overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee x_1 x_2 \overline{x_3} \vee x_1 x_2 x_3 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2} x_3 \vee \overline{x_1} x_2 x_3.$$

Рассмотрим пример 2. Пусть имеется булева функция от пяти переменных $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, заданная следующим выражением:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1 \overline{x_2} x_3 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_3} x_4 \vee x_1 x_3 \overline{x_5} \vee x_1 x_2 x_4 \vee$$

$$\vee \overline{x_2} x_3 x_5 \vee \overline{x_3}\,\overline{x_4} x_5.$$

Будем использовать формулу (2) для дифференцирования по каждой переменной с изменением переменных по x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 и их изменения попарно. Поставим цель – определить, какая из переменных в булевом выражении является наиболее влияющей на конечный результат (функцию). Для этого будем попеременно оценивать влияние (вес) каждой из пяти переменных. Весом производной

$$p\left(\frac{\partial^k f}{\partial(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ik})}\right)$$

от булевой функции называется число конституант этой производной, т. е. число совершенных элементарных конъюнкций в СДНФ, представляющей производную функции.

Определим переменную x_i, по которой производная $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ имеет максимальный вес, т.е. функция $(x_1, x_2, \ldots x_5)$ зависит от нее наиболее существенно.

Имеем

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = (\overline{x_2} x_3 \vee x_3 \overline{x_5} \vee x_2 x_4 \vee \overline{x_2} x_3 x_5 \vee \overline{x_3}\,\overline{x_4} x_5) \oplus$$

$$\oplus (\overline{x_3} x_4 \vee \overline{x_2} x_3 x_5 \vee \overline{x_3}\,\overline{x_4} x_5).$$

Для вычисления веса производной $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, зависящей от четырех переменных x_2, x_3, x_4, x_5, представим 4-мерное пространство с образующими $\{x_2, x_3, x_4, x_5\}$ в виде декартова произведения двух 2-мерных пространств $\{x_2, x_3\} \times \{x_4, x_5\}$ с образующими $\{x_2, x_3\}$ и $\{x_4, x_5\}$ соответственно.

Тогда производную $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ можно задать в виде двумерной таблицы: каждому значению σ_2, σ_3 переменных x2, x3 взаимно однозначно соответствует строка таблицы, столбцу – значения σ_4, σ_5 переменных x_4, x_5, и на пересечении i-й строки и j-го столбца, взаимно однозначно соответствующем точке 4-мерного пространства с образующими $\{x_2, x_3, x_4, x_5\}$, записываем значение $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ в этой точке. Вес (р) производной $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ равен числу единиц в табл. 1.

Таблица 1

x_2x_3	x_4x_5			
	0	**1**	**2**	**3**
0	0	0	1	1
1	1	0	1	0
2	0	0	0	0
3	1	0	1	1

Итак, $p\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) = 7$.

Аналогично вычислим веса производных $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 2$, 3, 4, 5 (табл. 2 – 5). Имеем:

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = (\overline{x_1}\,\overline{x_3}\,x_4 \vee x_1 x_3 \overline{x_5} \vee x_1 x_4 \vee \overline{x_3}\,\overline{x_4}\,x_5) \oplus$$

$$\oplus\,(x_1 x_3 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_3}\,x_4 \vee x_1 x_3 \overline{x_5} \vee x_3 x_5 \vee \overline{x_3}\,\overline{x_4}\,x_5).$$

Таблица 2

x_1x_3	x_4x_5			
	0	**1**	**2**	**3**
0	0	0	0	0
1	0	1	0	1
2	0	0	1	1
3	0	1	0	0

$p\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = 5$.

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = (x_1 \overline{x_5} \vee x_1 x_2 x_4 \vee \overline{x_2}\,x_5) \oplus (\overline{x_1}\,x_4 \vee x_1 x_2 x_4 \vee \overline{x_4}\,x_5).$$

Таблица 3

x_1x_2	x_4x_5			
	0	**1**	**2**	**3**
0	0	0	1	0
1	0	1	1	1
2	1	0	1	1
3	0	1	0	0

$p\left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right) = 8$.

$$\frac{\partial f}{\partial x_4} = (x_1 \overline{x_2}\,x_3 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_3} \vee x_1 x_3 \overline{x_5} \vee x_1 x_2 \vee \overline{x_2}\,x_3 x_5) \oplus$$

$$\oplus\,(x_1 \overline{x_2}\,x_3 \vee x_1 x_3 \overline{x_5} \vee \overline{x_2}\,x_3 x_5 \vee \overline{x_3}\,x_5).$$

Таблица 4

x_1x_2	x_3x_5			
	0	**1**	**2**	**3**
0	1	0	0	0
1	1	0	0	0
2	0	1	0	0
3	1	0	0	1

$p\left(\frac{\partial f}{\partial x_4}\right) = 5$.

$$\frac{\partial f}{\partial x_5} = (x_1 \overline{x_2}\,x_3 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_3}\,x_4 \vee x_1 x_2 x_4 \vee \overline{x_2}\,x_3 \vee x_3 \overline{x_4}) \oplus$$

$$\oplus\,(x_1 \overline{x_2}\,x_3 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_3}\,x_4 \vee x_1 x_3 \vee x_1 x_2 x_4).$$

Таблица 5

x_1x_2	x_3x_4			
	0	**1**	**2**	**3**
0	1	0	1	1
1	1	0	0	0
2	1	0	0	0
3	1	0	1	0

$p\left(\frac{\partial f}{\partial x_5}\right) = 7$.

Максимальное значение $\max\limits_i p\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$ получено при дифференцировании функции f по переменной x_3. Исключая эту переменную, получаем две остаточные функции: единичную $f(x_1, x_2, x_3 = 1, x_4, x_5) = f(1)$ и нулевую $f(x_1, x_2, x_3 = 0, x_4, x_5) = f(0)$:

$$f(1) = x_1 \overline{x_2} \vee x_1 \overline{x_5} \vee x_1 x_2 x_4 \vee \overline{x_2}\,x_5;$$

$$f(0) = \overline{x_1}\,x_4 \vee x_1 x_2 x_4 \vee \overline{x_4}\,x_5.$$

Аналогично определяем оптимальное исключение переменных на следующем ярусе логической схемы (табл. 6 – 13):

$$\frac{\partial f(1)}{\partial x_1} = (\overline{x_2} \vee \overline{x_5} \vee x_2 x_4 \vee \overline{x_2}\,x_5) \oplus \overline{x_2}\,x_5.$$

Таблица 6

x_2	x_4x_5			
	0	**1**	**2**	**3**
0	1	0	1	0
1	1	0	1	1

$p\left(\frac{\partial f(1)}{\partial x_1}\right) = 5$.

$$\frac{\partial f(1)}{\partial x_2} = (x_1 \overline{x_5} \vee x_1 x_4) \oplus (x_1 \vee x_1 \overline{x_5} \vee x_5).$$

Таблица 7

x_1	x_4x_5			
	0	**1**	**2**	**3**
0	0	1	0	1
1	0	1	0	0

$p\left(\frac{\partial f(1)}{\partial x_2}\right) = 3$.

$$\frac{\partial f(1)}{\partial x_4} = (x_1 \overline{x_2} \vee x_1 \overline{x_5} \vee x_1 x_2 x_4 \vee \overline{x_2}\,x_5) \oplus (x_1 \overline{x_2} \vee x_1 \overline{x_5} \vee \overline{x_2}\,x_5).$$

Таблица 8

x_1	$x_2 x_5$			
	0	**1**	**2**	**3**
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1

$$p\left(\frac{\partial f(1)}{\partial x_4}\right) = 1.$$

$$\frac{\partial f(1)}{\partial x_5} = (x_1 \overline{x_2} \vee x_1 x_2 x_4 \vee \overline{x_2}) \oplus (x_1 \overline{x_2} \vee x_1 \vee x_1 x_2 x_4).$$

Таблица 9

x_1	$x_2 x_4$			
	0	**1**	**2**	**3**
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0

$$p\left(\frac{\partial f(1)}{\partial x_5}\right) = 3.$$

Исключаем переменную x_1, получаем остаточные функции вида:

$f(x_1=1, x_2, x_3 = 1, x_4, x_5) = f(1, 1) = x_2 \vee x_5 \vee x_2 x_4 \vee x_2 x_5 =$
$= \overline{x_2} \vee \overline{x_5} \vee x_4.$

$f(x_1 = 0, x_2, x_3 = 1, x_4, x_5) = f(1, 0) = \overline{x_2} x_5.$

$f(0) = \overline{x_1} x_4 \vee x_1 x_2 x_4 \vee \overline{x_4} x_5 = \overline{x_1} x_4 \vee x_2 x_4 \vee \overline{x_4} x_5.$

$$\frac{\partial f(0)}{\partial x_1} = (x_2 x_4 \vee \overline{x_4} x_5) \oplus (x_4 \vee x_2 x_4 \vee \overline{x_4} x_5).$$

Таблица 10

x_2	$x_4 x_5$			
	0	1	2	3
0	0	0	1	1
1	0	0	0	0

$$p\left(\frac{\partial f(0)}{\partial x_1}\right) = 2.$$

$$\frac{\partial f(0)}{\partial x_2} = (x_1 x_4 \vee x_4 \vee \overline{x_4} x_5) \oplus (x_1 x_4 \vee \overline{x_4} x_5).$$

Таблица 11

x_1	$x_4 x_5$			
	0	**1**	**2**	**3**
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1

$$p\left(\frac{\partial f(0)}{\partial x_2}\right) = 2.$$

$$\frac{\partial f(0)}{\partial x_4} = (x_1 \vee x_2) \oplus x_5.$$

Таблица 12

x_1	$x_2 x_5$			
	0	**1**	**2**	**3**
0	1	0	1	0
1	0	1	1	0

$$p\left(\frac{\partial f(0)}{\partial x_4}\right) = 4.$$

$$\frac{\partial f(0)}{\partial x_5} = (x_1 x_4 \vee x_2 x_4 \vee \overline{x_4}) \oplus (x_1 x_4 \vee x_2 x_4).$$

Таблица 13

x_1	$x_2 x_4$			
	0	**1**	**2**	**3**
0	1	0	1	0
1	1	0	1	0

$$p\left(\frac{\partial f(0)}{\partial x_5}\right) = 4.$$

Исключая переменную x_4, получаем остаточные функции следующего вида:

$f(x_1, x_2, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = f(0, 1) = \overline{x_1} \vee x_2.$

$f(x_1, x_2, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = f(0, 0) = x_5.$

В результате получаем логическую схему, реализующую функцию $f(x_1, x_2, \ldots x_5)$ (рис. 1, а).

Критерий оптимального исключения переменных имеет эвристический характер, что основано на предположении о том, что чем больше вес производной $p\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$, тем больше функция f зависит от переменной x_i. Если имеются блоки исключения k переменных, то построение схемы проводят аналогично, вычисляя вес производных k-го порядка: $p\left(\frac{\partial^k f}{\partial(x_{i1}, x_{i2}, \ldots x_{ik})}\right)$.

В результате решения дифференциального уравнения булевых функций получена схема, отражающая наибольшее влияние каждой из переменных на результат (рис. 1).

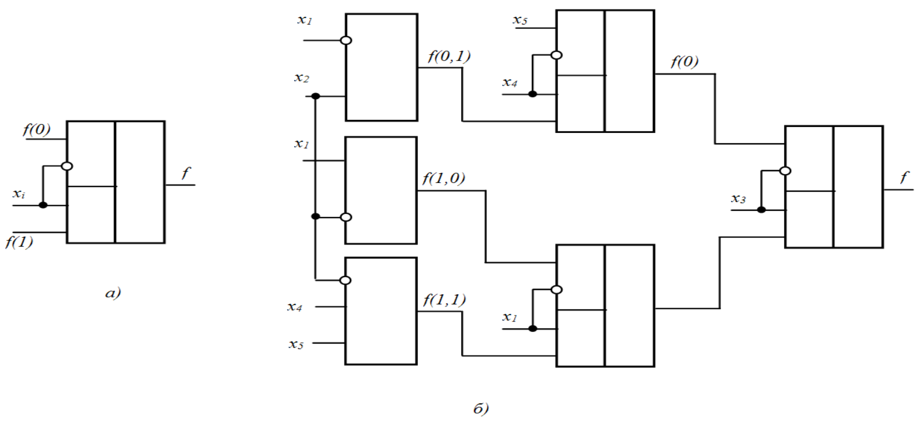

Рис. 1. *Схема взаимодействия компонентов булевой функции*

Получен ответ на вопрос: какую роль играет каждая булева переменная в заданном булевом выражении? Ответ представлен в графическом виде, что удобно для представления схемы на основе импульсов.

Таким образом, приведенные выше решения дифференциального уравнения булевых функций будут полезны для рассмотрения тем, кто начинает изучать этот достаточно сложный раздел дискретной математики.

Практическая значимость изучения решения дифференциальных уравнений булевых функций имеет большое значение. С их помощью можно решать задачи криптографической защиты информации, контроля надежности работы оборудования, а также изучать функционирование управляющих систем, считая, что управляющая система реализует набор булевых функций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Глухова Л.В. Определение приоритетов государственной поддержки управления и развития функционирования национальной инновационной системы // Вестник Поволжского государственного университета сервиса. Серия: Экономика. 2010. № 9. С. 118-122.
2. Марченков С.С. Замкнутые классы булевых функций. М.: Физматлит, 2000. 126 с.
3. Чернов А.В. Развитие аппарата логического дифференциального исчисления в применении к задачам проектирования и диагностики телекоммуникационных систем // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического института. Информатика. Телекоммуникации. Управление. 2008. Т. 2, № 55. С. 118–126.
4. Закревский А.Д. Логические уравнения. М.: Эдиториал УРСС, 2003. 93 с.
5. Спирина М.С., Спирин П.А. Дискретная математика. М.: Академия, 2014. 367 с.
6. Шевелев Ю.П. Дискретная математика. СПб.: Лань, 2008. 591 с.
7. Ярыгин О.Н. Алгоритм управления реконфигурацией резервированной системы на основе нечеткой информации. Деп. ВИНИТИ № 5555-В86, 1986. 42 с.
8. Yanushkevich S.N. Matrix and combinatorics solutions of Boolean differential equations // Discrete applied mathematics. 2002. № 117. P. 279–292.
9. Posthoff Ch., Steinbach B. Logic functions and equations – binary models for computer science. New York: Springer, 2004. 392 p.
10. Steinbach B. Losung binrer differentialgleichungen und ihre anwendung auf bin are systeme: dissertation. Germany: TH Karl-Marx-Stadt, 1981.
11. Ярыгин О.Н. Использование программных средств в преподавании «Дискретной математики» // Вестник Волжского университета им. В.Н. Татищева. 2004. Вып. 2. С. 264–266.
12. Ярыгин О.Н. Формирование интеллектуальной компетентности студентов ИТ-специальностей в процессе изучения дискретной математики : автореф. дис. … канд. пед. наук. Тольятти, 2007. 26 с.
13. Talantsev A.D. On the analysis and synthesis of certain electrical circuits by means of special logical operators // Avtomatika i telemehanika. 1959. № 20. P. 898–907.
14. Posthoff Ch., Steinbach B. Logic functions and equations – binary models for computer science. New York: Springer, 2004. P. 223.
15. Akers S.B. On a theory of boolean functions // Journal of the sociaety of industrial and applied mathematics. 1959. Vol. 7, № 4. P. 487–498.
16. Thayse A., Davio M. Boolean differential calculus and application to switching theory // IEEE Transactions on computers. 1973. Vol. 22, № 4. P. 409–420.
17. Scheuring R., Wehlan H. On the design of discrete event dynamic systems by means of the boolean differential calculus // First IFAC symposium on desing methods of control systems. Zurich, 1991. P. 723–728.
18. Brown F.M. Boolean reasoning. The logic of boolean equations. London: Dover Publications, 2003. 304 p.
19. Bochmann D. Boolean differential calculus (a survey) // Enginering cybernetika. 1977. Vol. 15, № 5. P. 67–75.
20. Thayse A. Boolean calculus of differences // Lecture notes in computer science. 1981. Vol. 101.
21. Steinbach B., Posthoff, Ch. Boolean differential calculus – theory and applications // Journal of computational and theoretical nanoscience. 2010. Vol. 7, №. 6. P. 933–981.
22. Спирина М.С., Гудков А.А., Терехина М. Решение дифференциальных уравнений для булевых функций // Наука и творчество: взгляд молодых профессионалов: материалы IX Международной научно-практической конференции. Тольятти: ПВГУС, 2015.

SOME APPROACHES TO THE SOLUTION OF THE BOOLEAN FUNCTION DIFERENTIAL EQUATIONS

M.S. Spirina, PhD (Pedagogy), Associate Professor, assistant professor of Chair “Higher Mathematics”
A.A. Gudkov, student
Volga Region State University of Service, Togliatti (Russia)

Keywords: Boolean logic; Boolean functions; differentiation; differential equations solution; Boolean functions differential equations.

Abstract: The authors consider some approaches to the solution of Boolean functions differential equations using certain examples. The goal of the research is to represent complex questions through the elementary examples.

The authors give the examples of solution of differential equations in partial derivatives. The paper will be useful to people who starts studying this issue.